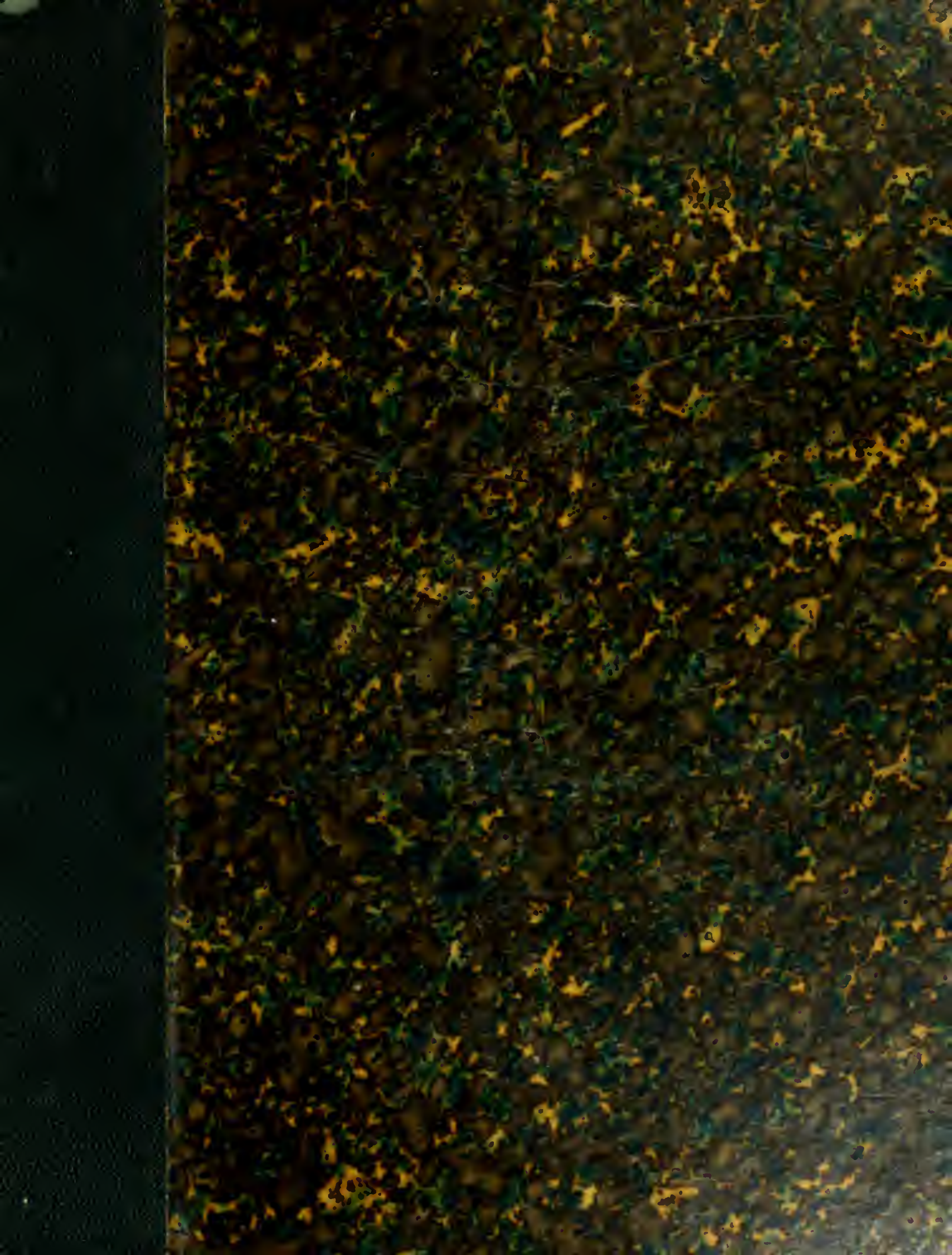
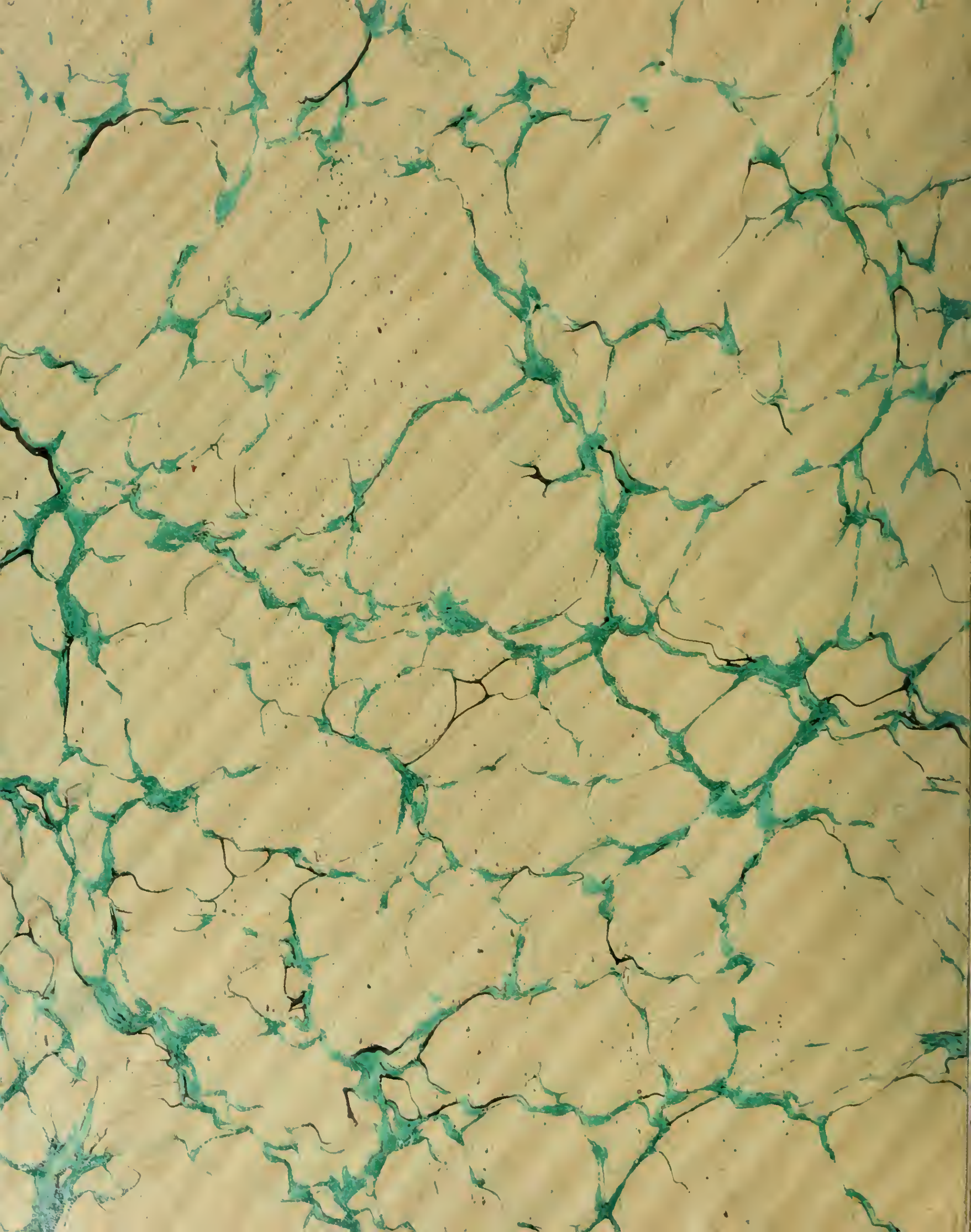
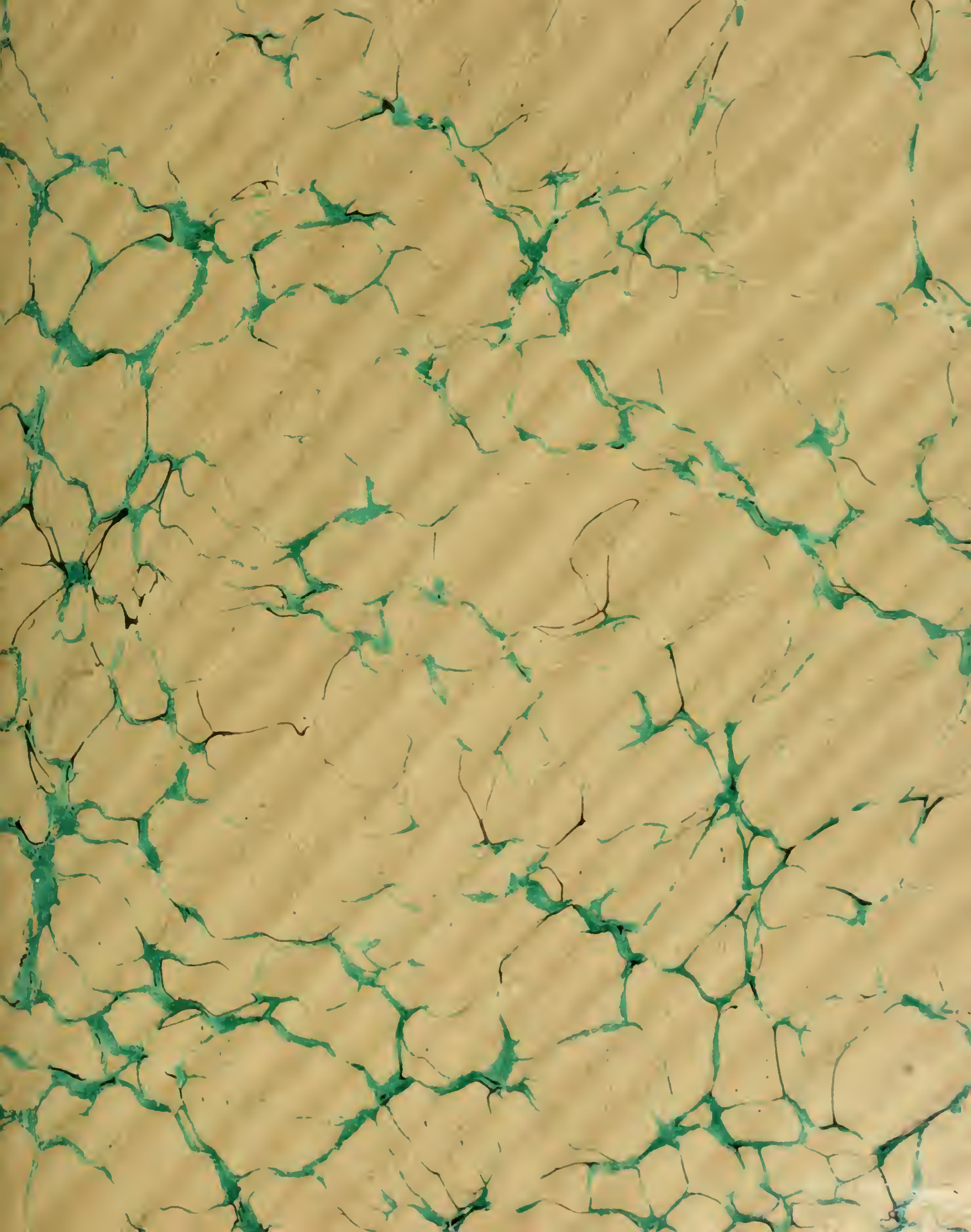






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1884.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1884



JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications;

PAR M. MAURICE LÉVY.

INTRODUCTION.

Le problème de la flexion finie d'une ligne ou verge élastique sous l'action des forces données a été, comme on sait, résolu par Lagrange dans le cas d'une verge droite, en faisant abstraction des forces qui, comme la pesanteur, agissent sur la masse entière de la verge, pour ne tenir compte que de celles qui s'exercent en ses extrémités.

Le cas nouveau et plus général que nous avons traité est celui de la déformation plane d'une verge qui, dans son état naturel, serait soit droite, soit circulaire, et qui, outre des forces ou couples agissant en

ses extrémités, supporterait une pression uniformément répartie sur sa fibre moyenne, normale à cette courbe et lui restant normale quelque déformation qu'elle prenne.

Le premier de ces deux cas ne dépend, comme on sait, que des fonctions elliptiques de première espèce; nous montrons que le second se ramène aussi à des quadratures elliptiques, mais comporte à la fois des fonctions elliptiques de première et de troisième espèce.

Le premier a trouvé une application extrêmement utile et importante en Résistance des matériaux, où il a fourni la solution, passée aujourd'hui dans la pratique, du problème si délicat de la stabilité des prismes droits dits *chargés debout* (colonnes, piliers, etc.). Le second (et c'est ce qui nous a amené à l'étudier) donne lieu à une application du même genre.

De même qu'une colonne comprimée suivant son axe reste théoriquement droite, mais se trouve dans une sorte d'équilibre instable en ce sens que la moindre déviation la fait rompre par flexion si elle est trop longue par rapport à ses dimensions transversales, de même une pièce circulaire (un manchon cylindrique mince par exemple), pressée normalement et uniformément de l'extérieur vers l'intérieur, se comprime en restant circulaire, mais se trouve aussi dans cette sorte d'équilibre instable, en ce sens que la moindre déviation accidentelle l'aplatit plus ou moins si son épaisseur est trop faible par rapport à son rayon.

Quelle épaisseur faut-il lui donner pour être certain qu'un tel accident ne pourra pas se produire? C'est, comme on voit, l'extension aux pièces circulaires du problème des pièces droites chargées debout [1].

---

(1) On peut poser un problème plus général et nouveau qui mériterait d'être appelé le *problème des pièces courbes chargées debout*. Toute pièce courbe dont la fibre moyenne satisfait à la double condition : 1° de coïncider avec l'une quelconque des courbes funiculaires relatives aux forces extérieures données qui la sollicitent; 2° d'être placée, par rapport à ces forces, de façon à être pressée et non tendue, est exactement dans le même état d'équilibre instable que les pièces droites chargées debout, parce qu'elle ne subit qu'une compression longitudinale sans flexion. Le cas des pièces circulaires que nous traitons ici est le plus simple après celui des pièces droites. Le cas le plus simple après paraît être celui de l'arc parabolique comprimé (pont suspendu renversé); mais nous n'avons pas réussi à le résoudre.

C'est une question qui nous a été plusieurs fois posée par des constructeurs qu'elle intéresse, en raison des pressions de plus en plus considérables aujourd'hui usitées dans certaines industries; et, à notre connaissance, elle n'est pas sortie du domaine de l'empirisme.

Pour la résoudre rationnellement, il faut commencer par chercher toutes les déformations de *grandeur finie* susceptibles de se produire sous l'influence d'une déviation accidentelle. Suivant que l'épaisseur du manchon (ou plus généralement le moment d'inertie de la section de l'anneau considéré) est plus ou moins faible, on reconnaît que ces déformations peuvent être, ou en nombre illimité, ou en nombre limité (on trouve dans les deux cas que la fibre moyenne affecte la forme de courbes étoilées rappelant celles du problème de la toupie en Mécanique) ou impossibles. La question est de savoir quelles dimensions il faut adopter pour être certain de se trouver dans ce dernier cas.

Pour cela, on observe que l'intégration de l'équation différentielle du second ordre de la fibre moyenne déformée introduit deux constantes arbitraires; ces constantes se déterminent par la double condition :

a. Que la courbe déformée est fermée;

b. Que sa longueur totale est sensiblement la même que celle de la fibre circulaire au moment où elle est simplement comprimée avant toute flexion.

L'expression de la condition *a* introduit naturellement dans la question un nombre entier n entièrement arbitraire, ce qui montre de suite qu'*en général* il pourra se produire une infinité de modes de flexion. Mais, si les dimensions de l'anneau sont suffisamment grandes, on conçoit que les deux conditions *a* et *b* pourront n'être plus compatibles que pour *certaines* valeurs de l'entier n, et, si ces dimensions sont plus grandes encore, on comprend de même que les deux conditions pourront devenir incompatibles, *quel que soit cet entier n*. Ce sont ces dernières dimensions qui assureront la pièce contre toute flexion accidentelle et qu'il s'agit de découvrir.

Les deux conditions *a* et *b* se traduisent analytiquement par un système de deux équations modulaires simultanées, auxquelles, après diverses transformations, nous avons donné la forme suivante, où U et n sont les deux constantes de l'intégration qu'il faut déterminer, con-

stantes que nous avons choisies de façon qu'elles soient purement numériques, toutes deux positives et la seconde moindre que 1; E, I, p, ρ_0 sont respectivement le coefficient d'élasticité de la matière, le moment d'inertie de la section de l'anneau $\left(\right.$si l'anneau est un simple manchon cylindrique d'épaisseur ε et de longueur 1, $\left.\mathrm{I}=\frac{\varepsilon^3}{12}\right)$, la pression par unité de longueur de la fibre moyenne, le rayon de cette fibre après la compression simple sans flexion due à la pression p: enfin n est le nombre entier dont il vient d'être parlé :

$$\frac{\varpi}{n}\left(\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{U}^{-\frac{2}{3}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}(1+uy)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}},$$

$$\frac{2\varpi}{n}=\int_{-1}^{+1}\frac{2\mathrm{U}(1+uy)-u^2(1-y^2)}{(1+2uy+u^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}(1+uy)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

On peut observer d'abord que ces deux équations qui fournissent les deux constantes U et u en fonction des données E, I, p, ρ_0 du problème et du nombre entier n ont ceci de remarquable :

1° La seconde est absolument indépendante de la nature et des dimensions de l'anneau; elle donne, pour chaque valeur de n, la constante U en fonction de celle u; on pourrait donc construire, une fois pour toutes, une Table numérique de cette relation, Table qui serait applicable à tous les anneaux imaginables, quelles que soient leur forme, les dimensions de leur section transversale, leur rayon et la matière dont ils sont formés.

2° La première renferme toutes les données du problème *en bloc*, c'est-à-dire dans le seul terme $\left(\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$, de sorte qu'on pourrait aussi faire de l'intégrale définie du second membre une Table applicable à toute espèce d'anneaux.

En discutant ces équations (sans les ramener à la forme normale, ce qui nous a paru très compliqué comme calcul), nous trouvons : 1° que l'entier n ne peut jamais être 1, qu'on a, au moins, $n=2$; 2° que les deux équations sont incompatibles, quel que soit n, et que, par suite,

aucune flexion ne peut se produire, si l'on prend

$$\frac{\mathrm{EI}}{p r_0^3} > \frac{4}{9}\ (^1),$$

inégalité qui fournit ainsi une solution très commode et très pratique du problème posé, quoique l'analyse qui y amène soit très laborieuse.

Nous sommes conduit, en passant, à quelques remarques simples, mais utiles et qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été faites, sur les verges planes de forme quelconque soumises à une pression normale uniforme. Ainsi, nous montrons que, si une telle verge est arrivée à l'état d'équilibre et que, suivant la théorie soit de l'Élasticité, soit de la Résistance, on remplace les forces élastiques qui se développent dans chaque section transversale par une force unique F passant par le centre de gravité de cette section et par un couple unique :

1° Si, en chaque point de la fibre moyenne, on mène une perpendiculaire à la force élastique F qui y passe, toutes ces perpendiculaires concourent en un même point que nous nommons le *centre des forces élastiques*.

2° La force F est proportionnelle à la distance r de son point d'application à ce centre et le coefficient de proportionnalité est la pression donnée p, en sorte que $\mathrm{F} = pr$.

En un mot, les forces élastiques F aux différents points de la fibre moyenne déformée sont égales en grandeur, direction et sens aux vitesses que prendraient ces points si l'on imprimait à la courbe une rotation instantanée, numériquement égale à la pression donnée p, autour d'un point convenablement choisi du plan, point que nous appelons le *centre des forces élastiques*.

3° Le moment de flexion M est, à une constante près, égal à $\frac{pr^2}{2}$.

(1) Ainsi que nous l'observons dans le corps de ce Mémoire, le chiffre 4 ne représente pas la limite la plus faible possible; il est vraisemblable, d'après les considérations indiquées (p. 37), que cette dernière limite est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Nous avons indiqué cette limite, dès 1882, au Collège de France, où ce travail a été exposé en entier.

Ces résultats permettent de donner à l'équation différentielle du second ordre à intégrer la forme la plus simple possible.

§ I. — Propriétés générales des forces élastiques résultant d'une pression uniforme exercée normalement a la fibre moyenne d'une pièce plane de forme quelconque.

Je considère une verge élastique qui, dans son état naturel, soit symétrique par rapport à un plan contenant sa fibre moyenne.

Celle-ci supporte une pression normale et uniformément répartie sur toute sa longueur à raison de p kilogrammes par unité de longueur. Sous l'influence de cette pression, la pièce se déformera, mais sans que sa fibre moyenne sorte de son plan.

Je ne suppose d'ailleurs pas que cette déformation soit très petite. J'admets qu'elle peut atteindre une grandeur quelconque si les dimensions transversales de la pièce sont assez petites pour que cela puisse avoir lieu sans rupture et sans que la limite d'élasticité de la matière soit dépassée.

Considérons la pièce dans son état d'équilibre définitif, état qu'il s'agit de déterminer.

On sait que, suivant les règles de la Résistance des matériaux et aussi suivant les déductions approchées des principes de la théorie mathématique de l'Élasticité, les forces élastiques qui agissent dans une section transversale quelconque peuvent être remplacées par :

1° Une force unique F appliquée au centre de gravité de la section, c'est-à-dire au point où elle coupe la fibre moyenne;

2° Un couple unique M qu'on nomme le *couple de flexion* ou moment fléchissant.

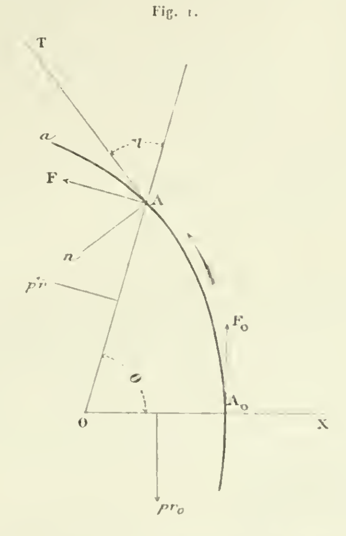
Rappelons encore que la projection de la force F sur la normale à la fibre moyenne se nomme l'*effort tranchant*.

Pour préciser le sens de ces forces, soit (*fig.* 1) A un point quelconque de la fibre moyenne, point dont nous pouvons définir la position par l'arc $A_0A = s$ qui le sépare d'un point fixe A_0, les s positifs étant comptés dans le sens de la flèche.

Nous appelons force élastique F et moment de flexion M au point A la résultante de translation et le moment résultant des pressions élas-

tiques exercées par la partie A_0A de la pièce sur la partie Aa, en sorte que les pressions inverses exercées par cette dernière partie sur la première auront respectivement $-F$ et $-M$ pour résultante et pour moment résultant.

Fig. 1.



Cela posé, voici quelques propositions très simples, mais qui nous seront très utiles :

THÉORÈME I. — *Quelle que soit la forme d'équilibre que prend une verge élastique plane (primitivement droite ou courbe) sous l'influence d'une pression p uniforme et normale à sa fibre moyenne, la force élastique F qui s'exerce en un point quelconque A de cette fibre est égale en grandeur, direction et sens à la vitesse que prendrait ce point, si l'on imprimait à la verge une rotation instantanée dont la vitesse angulaire serait numériquement égale à p, autour d'un point convenablement choisi du plan. En d'autres termes, si, par chaque point A de la fibre moyenne, on mène une perpendiculaire à la force élastique F qui s'y produit : 1° toutes ces perpendiculaires concourent en un même point O que*

j'appelle le centre des forces élastiques; 2° *on a* $F = p \times OA = pr$, *en désignant par r le rayon vecteur* OA *issu du point* O; 3° *toutes les forces* F *tendent à faire tourner la verge dans le même sens autour du point* O. *Ce sens est celui qui va de la partie* A_0A *qui, en vertu de nos conventions, exerce la force élastique, vers la partie* Aa *qui la subit.*

Pour démontrer cette proposition, soient (*fig.* 1) F et M la force élastique et le couple de flexion au point quelconque A; F_0 et M_0 les quantités analogues au point A_0.

Par ce dernier point je mène A_0O perpendiculaire à F_0 et je prends sur cette perpendiculaire une longueur $A_0O = r_0$, telle qu'on ait

$$F_0 = pr_0. \tag{a}$$

Je porte cette longueur à la gauche d'un observateur placé en A_0 et regardant F_0. Je dis que le point O est le *centre* des forces élastiques, c'est-à-dire que, si on le joint au point A, la force élastique F est perpendiculaire au rayon vecteur $OA = r$, située à la gauche de ce rayon comme F_0 l'est par rapport au rayon OA_0 et que, de plus, $F = pr$.

En effet, la portion A_0A de la verge est en équilibre sous l'influence :

1° Des forces élastiques F_0, $-F$ exercées en A_0 et A et de la pression p exercée sur l'arc A_0A;

2° Des couples M_0 et $-M$.

Il faut donc que la somme des projections de ces diverses forces sur un axe quelconque et la somme de leurs moments relativement à un point quelconque du plan soient nulles.

Mais on sait que, si une pression uniforme p s'exerce normalement à la courbe plane A_0A, la somme des projections des pressions élémentaires sur un axe quelconque et la somme de leurs moments relativement à un point du plan sont indépendantes de la forme de la courbe; on ne change donc pas ces sommes, ni, par suite, les conditions d'équilibre de translation et de rotation, en remplaçant cette pression par une pression pareille exercée sur le contour brisé AOA_0, ou par deux forces pr et pr_0 respectivement appliquées aux milieux des deux lignes AO et OA_0 perpendiculairement à ces lignes et dans les sens indiqués sur la figure.

Or, en vertu de la relation (a), les forces F_0 et pr_0 forment un couple; donc les forces dont nous avons à écrire les conditions d'équilibre se réduisent en définitive à :

1° Trois couples M_0, $-M$, (F_0, pr_0);

2° Deux forces pr, $-F$.

Pour que ces deux dernières puissent équilibrer les couples, il faut qu'elles forment elles-mêmes un couple; par suite, les forces pr et $+F$ doivent être égales, parallèles et de même sens, ce qui démontre la proposition énoncée.

Théorème II. — *Le moment fléchissant en un point quelconque de la fibre moyenne est, à une constante près, égal à $\frac{1}{2}pr^2$, c'est-à-dire au demi-produit de la pression p par le carré de la distance du point A considéré au centre des forces élastiques.*

En effet, les forces pr et $-F$ formant un couple, il doit y avoir équilibre entre les quatre couples

$$M_0, \quad -M, \quad (F_0, pr_0), \quad (pr, -F).$$

Je regarderai les moments comme positifs lorsqu'ils tendront à faire tourner leurs bras de levier de *droite à gauche*, c'est-à-dire lorsqu'ils tendront à augmenter la courbure de la courbe A_0A telle qu'elle est représentée sur la figure; alors les deux couples (F_0, pr_0) et (pr, $-F$) sont, le premier négatif, le second positif, et leurs moments respectifs seront en grandeur et signe

$$-\frac{pr_0^2}{2}, \quad +\frac{pr^2}{2}.$$

Donc, l'équilibre entre les quatre couples exige que

$$M_0 - M - \frac{pr_0^2}{2} + \frac{pr^2}{2} = 0$$

ou

$$M - \frac{pr^2}{2} = M_0 - \frac{pr_0^2}{2} = \text{const.},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. — Les points où le moment fléchissant est maximum ou minimum sont ceux où le rayon vecteur r issu du centre des forces élastiques est lui-même maximum ou miximum, c'est-à-dire les pieds des normales abaissées de ce point sur la fibre moyenne.

Corollaire II. — Aux points où le moment fléchissant est maximum ou minimum, l'effort tranchant est nul (car, en vertu du théorème I, la force élastique F y est tangente à la fibre moyenne ou perpendiculaire à la section droite de la pièce).

Cela, du reste, résulterait aussi du théorème suivant qui est vrai, même quand les forces extérieures ne se réduisent pas à une pression uniforme.

THÉORÈME III. — *L'effort tranchant en chaque point de la fibre moyenne est égal à la dérivée du moment fléchissant relativement à l'arc s qui définit ce point.*

En effet, de l'expression ci-dessus trouvée pour M, on tire

$$\frac{dM}{ds} = pr\frac{dr}{ds} = F\frac{dr}{ds}.$$

Mais $\frac{dr}{ds}$ est le cosinus de l'angle que forme le rayon vecteur OA (*fig.* 1) avec la tangente AT à la fibre moyenne en ce point, ou le cosinus de l'angle que la force F perpendiculaire au rayon vecteur fait avec la normale n. Donc le second membre est bien la projection de la force F sur la section droite de la pièce, c'est-à-dire l'effort tranchant.

§ II. — Équation de la flexion finie d'une verge circulaire soumise a une pression normale uniforme.

Supposons que la verge qui, sous l'influence de la pression normale p, affecte la forme A_0A, ait, à l'état naturel, la forme d'un arc de cercle de rayon ρ_0 (ce qui comprend le cas où elle aurait été d'abord rectiligne en supposant $\rho_0 = \infty$.)

Désignons par ρ le rayon de courbure au point A de la courbe d'équilibre, dans sa forme finale. Si E est le coefficient d'élasticité de la matière

qui forme la verge et I le moment d'inertie de sa section droite relativement à un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le point A, on a, d'après les principes de la Résistance et aussi ceux de la théorie mathématique de l'Élasticité (en écartant le cas où la compression longitudinale de la fibre moyenne serait comme infinie par rapport aux autres forces élastiques) :

$$(1) \qquad \mathrm{EI}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \mathrm{M}.$$

Nous avons vu que

$$(2) \qquad \mathrm{M} - \frac{pr^2}{2} = \mathrm{M}_0 - \frac{pr_0^2}{2} = \mathrm{C} = \text{const.}$$

La constante C n'est pas connue *a priori*; elle est à déterminer par les conditions du problème.

On tire de là

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{EI}} + \frac{pr^2}{2\,\mathrm{EI}}$$

ou, en posant

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho_0} + \frac{\mathrm{C}}{2\,\mathrm{EI}} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\mu,$$

μ étant une autre constante indéterminée remplaçant celle de C, il viendra

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}(r^2 + \mu),$$

équation différentielle du second ordre qu'il s'agit d'intégrer.

Rapportons la courbe cherchée à un axe polaire $\mathrm{OA_0X}$ issu du centre des forces élastiques et passant par le point arbitrairement choisi $\mathrm{A_0}$ à partir duquel nous comptons les arcs s. Désignons par θ l'angle polaire et par V l'angle que la tangente AT prolongée dans le sens des s positifs fait avec le rayon vecteur OA : alors la courbure, comptée comme positive lorsque la courbe présente sa concavité à l'axe polaire, sera

$$\frac{d(\mathrm{V} + \theta)}{ds}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{ds} + \frac{d\theta}{ds}.$$

Mais on a

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = r\frac{d\theta}{ds};$$

d'où enfin

$$\frac{1}{\rho} = \cos V \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\sin V = \frac{1}{r}\frac{dr\sin V}{dr}.$$

Donc l'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{1}{r}\frac{dr\sin V}{dr} = \frac{p}{2\mathrm{EI}}(r^2 + \mu),$$

μ étant, comme il a été dit, une constante arbitraire à déterminer par les conditions du problème.

On tire de là

$$(5) \qquad \sin V = \frac{p}{2\mathrm{EI}}\left(\frac{r^3}{4} + \frac{\mu r}{2} + \frac{A}{r}\right),$$

A étant une nouvelle constante,

$$(5\ bis) \qquad \cos V = \frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{1 - \frac{p^2}{4\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^3}{4} + \frac{\mu r}{2} + \frac{A}{r}\right)^2},$$

ou

$$\frac{dr^2}{ds} = \pm\sqrt{4r^2 - \frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{4} + A\right)^2},$$

qui montre que r^2 s'obtient en fonction de l'arc s par une quadrature elliptique

$$(6) \qquad s = \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\pm\sqrt{4r^2 - \frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2}},$$

en remplaçant la lettre $r_0 = \mathrm{OA}_0$ par celle b.

D'ailleurs, de l'équation (5) qui donne $\sin V$ on tire

$$\sin V = r\frac{d\theta}{ds} = r\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dr}\frac{dr^2}{ds}$$

ou

$$\frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{r^3}{4}+\frac{\mu r}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r}\right)=\pm\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dr}\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}\right)^2}$$

ou, en divisant les deux membres par r, il vient

$$\frac{d\theta}{dr^2}=\frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r^2}\right)\frac{1}{\pm\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}\right)^2}},$$

et

$$(7)\qquad \theta=\frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\int_{b^2}^{r^2}\frac{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r^2}\right)dr^2}{\pm\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}\right)^2}},$$

qui est l'équation même de la courbe cherchée en coordonnées polaires. Elle n'exige, comme celle qui donne l'arc, que des intégrations elliptiques.

Il reste à déterminer les trois constantes A, μ, b par les conditions particulières de chaque problème. Une fois ces constantes connues, la courbe de flexion l'est elle-même, par suite aussi (théorème I) la force élastique F dont les composantes normales et tangentielles à la courbe donnent respectivement l'effort tranchant et la compression longitudinale de la fibre moyenne. D'ailleurs, la constante μ connue, on en déduit par la formule (3) celle C qui entre dans l'expression du moment fléchissant : celui-ci sera donc également déterminé.

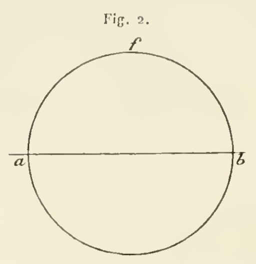
On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer, d'après les règles habituelles, l'aire et le moment d'inertie de la section de la pièce, de façon que la compression, l'extension et l'effort tranchant maxima ne dépassent pas les limites assignées à la matière que l'on emploie.

§ III. — Application a la stabilité d'un anneau fermé et uniformément comprimé sur tout son pourtour.

Supposons (*fig.* 2) que, dans son état naturel, la fibre moyenne forme un anneau circulaire fermé de rayon donné ρ_1. Sous l'influence de la

pression p que je suppose agir de l'extérieur vers l'intérieur, la pièce se contractera en restant circulaire. Si l'on fait une section diamétrale quelconque, qu'on appelle $\mathfrak{S}$ l'aire de la section de la pièce et qu'on

Fig. 2.



désigne par R la compression par unité de surface qu'on ne veut pas dépasser, on devra avoir, d'après la formule habituelle qui exprime l'équilibre du demi-anneau *afb*,

$$2R\mathfrak{S} = 2\rho_1 p,$$

d'où

$$\mathfrak{S} = \frac{p\rho_1}{R}.$$

Si la pression s'exerçait du dedans au dehors, cette formule suffirait : mais ici, si l'on ne donnait à la pièce que la section ainsi déterminée, l'équilibre serait instable, ainsi qu'il a été expliqué en commençant, et le moindre dérangement pourrait lui faire prendre une déformation très grande. Il s'agit de déterminer les dimensions à adopter pour éviter un tel accident. Pour cela il est indispensable d'étudier, suivant la théorie qui précède, *toutes les déformations finies susceptibles de se produire*. Ces déformations sont, comme nous le verrons, en nombre plus ou moins grand, suivant les dimensions de la pièce; plus les dimensions sont faibles, plus le nombre des déformations distinctes qui pourraient se produire sera grand. Si, au contraire, les dimensions sont suffisamment grandes, il ne pourra s'en produire aucune et l'équilibre stable sera assuré. Ce sont les dimensions assurant cette stabilité qu'il s'agit de déterminer.

Quelle que soit la section $\mathfrak{S}$, la pression par unité de surface qui se produit sous l'influence de la compression uniforme laissant la pièce circulaire sera

$$\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}}.$$

La contraction correspondante sera

$$\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}},$$

E étant le coefficient d'élasticité de la matière.

Donc, en appelant ρ_0 le rayon de la circonférence comprimée, on aura

$$\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_0}=\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}},$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}=1+\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}}$$

et

$$\frac{1}{\rho_0}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{E}\frac{p}{\mathfrak{S}}.$$

C'est cette valeur qu'on adoptera pour le rayon initial (c'est-à-dire avant toute flexion) de la circonférence comprimée; elle diffère du reste très peu de celle donnée $\frac{1}{\rho_1}$.

Admettons maintenant que, par une circonstance fortuite, il se produise une flexion finie. L'équation de la courbe déformée dans son état d'équilibre final sera celle (7), et la longueur s d'une partie de cette courbe sera fournie par l'équation (6). Pour que ces équations déterminent le problème, il faut trouver les trois constantes arbitraires λ, μ, b qui y entrent.

Puisque la courbe cherchée est fermée, il s'ensuit que le rayon vecteur r passe au moins par un minimum et au moins par un maximum. Les maximum et minimum du rayon vecteur répondent aux normales abaissées du centre des forces élastiques O sur la courbe; ce sont donc les valeurs de r pour lesquelles $\cos V = 0$; ce sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro la quantité sous le radical qui

entre dans l'équation de la courbe, soit les racines de l'équation

$$4r^2 - \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2 = 0.$$

Cette équation a donc ici au moins deux racines réelles.

Nous avons, jusqu'à présent, laissé la direction de l'axe polaire OA_0 (*fig.* 1) arbitraire; plaçons cet axe suivant la direction du plus petit de tous les rayons r, en sorte que b désigne ce plus petit rayon et, par suite, b est l'une des racines de l'équation ci-dessus. Désignons par a le plus grand de tous les rayons, en sorte que a sera une autre racine, et l'on aura deux relations

$$4a^2 = \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{a^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A\right)^2,$$

$$4b^2 = \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{b^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A\right)^2,$$

qui permettent de déterminer les constantes indéterminées A et μ en fonctions de celles a, b, et de n'avoir plus que ces deux dernières à la place des trois A, μ, b que nous avions d'abord.

Des deux équations ci-dessus on tire, en extrayant la racine carrée des deux membres,

$$\frac{a^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A = \pm \frac{2EI}{p} a,$$

$$\frac{b^4}{4} + \frac{\mu b^2}{2} + A = \pm \frac{2EI}{p} b.$$

Mais les signes supérieurs sont seuls admissibles. En effet, soit (*fig.* 3) $OA_0 = b$ le plus petit de tous les rayons vecteurs; en ce point la tangente A_0T_0, comptée dans le sens des s positifs ou de la flèche, fait, avec le prolongement du rayon vecteur, un angle $T_0A_0R_0 = \frac{\varpi}{2}$, en sorte que, pour $r = b$, on a

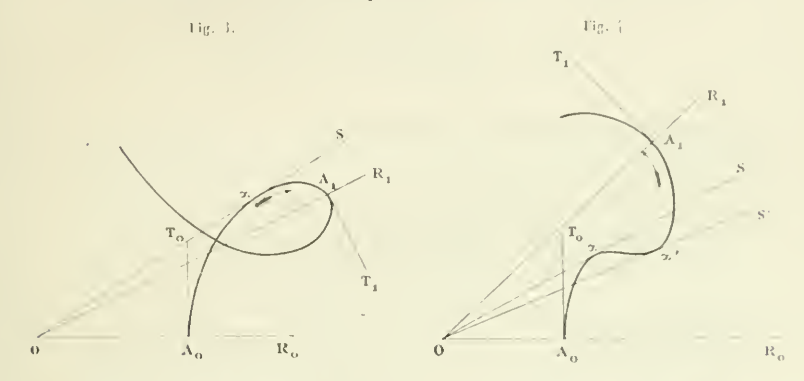
$$\sin V = +1;$$

soit $OA_1 = a$ le plus grand de tous les rayons vecteurs; je dis qu'on a

aussi en ce point

$$\sin V = +1;$$

car, pour qu'on eût $\sin V = -1$, il faudrait que, comme dans la *fig.* 3, l'angle V s'annulât en changeant de signe pour un certain rayon vecteur $O\alpha S$; mais alors la courbe présenterait forcément quelque part un



point double, ce qui, dans la question physique qui nous occupe, est impossible; si donc V s'annule pour un rayon $O\alpha S$, il faut qu'il s'annule une seconde fois pour un autre rayon $O\alpha' S$, comme dans la *fig.* 4, de façon que, pour $r = a$ aussi bien que pour $r = b$, on ait

$$\sin V = +1;$$

donc, à cause de (5), les premiers membres des équations ci-dessus et, par suite, les seconds sont positifs, et l'on en tire

$$\frac{\mu}{2} = \frac{4EI}{p(a+b)} - \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$A = -\frac{2EIab}{p(a+b)} + \frac{a^2b^2}{4},$$

d'où

$$\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A = \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)}{4} + \frac{2EI}{p(a+b)}(r^2-ab).$$

D'ailleurs les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$\frac{ps}{EI} = \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\sqrt{\frac{4E^2I^2}{p^2} r^2 - \left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2}},$$

$$2\theta = \int_{b^2}^{r^2} \frac{\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right) dr^2}{r^2 \sqrt{\frac{4E^2I^2}{p^2} r^2 - \left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2}}.$$

Le polynôme sous le radical est le produit

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A + \frac{2EI}{p} r\right)\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A - \frac{2EI}{p} r\right) \\
&= -\left[\frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{4} + \frac{2EI}{p(a+b)}(r+a)(r+b)\right] \\
&\quad \times \left[\frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{4} + \frac{2EI}{p}(r-a)(r-b)\right] \\
&= \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{16}\left[(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{16EI}{p(a+b)}(r^2 + ab) + \frac{64E^2I^2}{p^2(a-b)^2}\right].
\end{aligned}$$

Donc, en posant

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned}
R &= (r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{16EI}{p(a+b)}\left[(r^2 + ab) + \frac{64E^2I^2}{p^2(a-b)^2}\right] \\
&= r^4 + \left[\frac{16EI}{p(a+b)} - (a^2 - b^2)\right] r^2 + \left[ab + \frac{8EI}{p(a+b)}\right] \\
&= \left[r^2 + \frac{8EI}{p(a+b)} - \frac{a^2 + b^2}{2}\right]^2 + \frac{8EI(a+b)}{p} - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{p}{4EI} s &= \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}\sqrt{R}}, \\
2\theta &= \int_{b^2}^{r^2} \frac{\left[(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{2EI}{p(a+b)}(r^2 + ab)\right] dr^2}{r^2 \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}\sqrt{R}}.
\end{aligned}\right.$$

Comme b^2 est le minimum de r^2, pour $r^2 = b^2$, on aura

$$\frac{dr^2}{ds} > 0;$$

c'est pourquoi on a pris, dans la première des deux équations, les radicaux avec le signe $+$ au lieu de conserver le double signe de l'équation (6). De même, pour $r^2 = b^2$, on a

$$\frac{dr^2}{d\theta} > 0;$$

et comme, pour $r^2 = b^2$, la quantité hors des radicaux, dans l'expression de 2θ, est positive, on doit aussi, dans la dernière, prendre les radicaux avec le signe $+$.

Le carré du rayon vecteur est une fonction périodique de θ dont la période est le double de l'intégrale du second membre prise de b^2 à a^2. Pour que la courbe soit fermée, il faut que cette période soit une partie aliquote de 2ϖ, soit $\frac{2\varpi}{n}$, n désignant un entier.

La longueur totale de la courbe est $2\varpi\rho_0$, c'est-à-dire sensiblement égale à la circonférence de l'anneau comprimé avant la flexion; la longueur correspondante à l'angle $\frac{2\varpi}{n}$ représentant la période sera donc $\frac{2\varpi\rho_0}{n}$. Donc on a, pour déterminer les deux constantes a et b, les deux équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{4\mathrm{EI}}\,\frac{\varpi\rho_0}{n} &= \int_{b^2}^{a^2} \frac{dr^2}{\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}\sqrt{\mathrm{R}}},\\ \frac{2\varpi}{n} &= \int_{b^2}^{a^2} \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)+\frac{2\mathrm{EI}}{p(a+b)}(r^2+ab)}{r^2\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}\sqrt{\mathrm{R}}}\,dr^2.\end{aligned}\right.$$

Faisons

$$(11)\qquad r^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\,y.$$

La nouvelle variable y sera purement numérique et comprise entre

-1 et $+1$. On aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} R &= \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2(y^2-1) + \frac{8EI(a-b)}{p}y + \frac{8EI(a+b)}{p} + \frac{64E^2I^2}{p^2(a+b)^2}, \\ &\text{ou} \\ R &= \left[\frac{a^2-b^2}{2}y + \frac{8EI}{p(a+b)}\right]^2 + \frac{8EI(a+b)}{p} - \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

De plus, aux deux constantes a et b, substituons les suivantes :

$$(13)\quad u = \frac{a-b}{a+b}, \quad U = \frac{8EI}{p(a+b)^3},$$

dont la première est évidemment numérique et, de plus, comprise entre 0 et 1 puisque b et a sont positifs; la seconde est aussi numérique, comme on le déduit aisément de l'homogénéité de l'équation (4). Posons enfin

$$(14)\quad R = (a+b)^4 R',$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= \left(U + \frac{uy}{2}\right)^2 + U - \frac{u^2}{4} \\ &= U^2 + U - \frac{u^2}{4} + Uuy + \frac{u^2y^2}{4}, \end{aligned}\right.$$

et les équations (10) deviendront

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{4EI}\frac{\varpi}{n}\rho_0(a+b)^2 = \frac{\varpi}{n}\left(\frac{EI}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}}U^{-\frac{2}{3}} &= \int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{R'}}, \\ \frac{2\varpi}{n} &= \int_{-1}^{1}\frac{U\dfrac{uy+1}{2} - \dfrac{u^2}{4}(1-y^2)}{\left(\dfrac{1+u^2}{4} - \dfrac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{R'}}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations, qui servent à determiner les constantes U et u, ont ceci de remarquable que : 1° la seconde ne renferme plus aucune des données du problème; elle fournit entre les deux constantes U et u une relation purement numérique, applicable à tous les anneaux, quelles que soient leur nature et leurs dimensions. Si donc on voulait

déterminer ces deux constantes, on pourrait construire une Table donnant U en fonction de u pour les diverses valeurs de l'entier n; 2° la première équation ne contient plus les données E, I, p, ρ_0 que par le seul terme $\left(\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3}\right)$ placé hors du signe d'intégration, en sorte qu'on pourrait aussi construire une Table du second membre de cette équation, applicable à tous les anneaux.

Cela étant, pour que le radical $\sqrt{\mathrm{R}'}$ soit réel pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et $+1$, il faut et il suffit que

$$(17)\qquad \mathrm{U} > \frac{u^2}{4}.$$

Cette condition est évidemment suffisante; elle est aussi nécessaire : car, si $\mathrm{U} < \frac{u^2}{4}$, on a, *a fortiori*, puisque u est moindre que 1, $\mathrm{U} < \frac{u}{2}$; par suite, la quantité $\mathrm{U} + \frac{uy}{2}$ est de signes contraires pour $y = +1$ et $y = -1$: donc le premier terme de la première expression (15) de R' s'annule pour une certaine valeur de y et, pour cette valeur, le radical $\sqrt{\mathrm{R}'}$ deviendrait imaginaire.

Soient R'_1 et R'_0 la plus grande et la plus petite valeur que puisse atteindre R' pour les valeurs de y comprises entre $+1$ et -1.

La première a évidemment lieu pour $y = +1$.

La seconde a lieu pour $y = -1$ si le terme $\left(\mathrm{U} + \frac{uy}{2}\right)^2$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si $\mathrm{U} > \frac{u}{2}$; dans le cas contraire, cette plus petite valeur a lieu pour $\mathrm{U} + \frac{uy}{2} = 0$. Ainsi

$$(18)\qquad \mathrm{R}'_1 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{U} + \mathrm{U}u$$

et

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}'_0 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - \mathrm{U}u & \text{pour} \quad \mathrm{U} > \frac{u}{2}, \\ \mathrm{R}'_0 = \mathrm{U}^2 - \frac{u^2}{4} & \text{pour} \quad \mathrm{U} < \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Cela posé, occupons-nous d'abord de la première des équations (16)

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3} = h,$$

elle devient

(19 *bis*) $$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy - \frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

On tire évidemment de là

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy}}$$

ou

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}-\mathrm{U}uy}} \right).$$

Or la parenthèse est plus grande que $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}}$, comme on le voit en comparant les carrés de ces deux quantités. Donc, on aura *a fortiori*

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \frac{2}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}} \int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

ou

$$\frac{1}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}}$$

ou

$$h^{-\frac{1}{3}} > \frac{n\mathrm{U}^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}},$$

ou

(20) $$h^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{U}^{\frac{2}{3}} + \mathrm{U}^{-\frac{1}{3}}},$$

ou

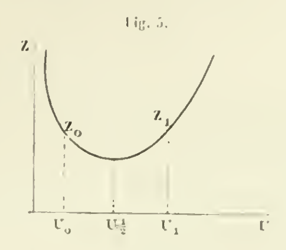
(20 *bis*) $$h^{\frac{1}{3}} < \mathrm{Z},$$

en posant

(20 *ter*) $$\mathrm{Z} = \frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{U}^{\frac{2}{3}} + \mathrm{U}^{-\frac{1}{3}}}.$$

On voit que Z est infini pour $U = 0$ et pour $U = \infty$, passe par un minimum unique pour $U = \frac{1}{2}$ et n'admet pas de maximum, de sorte que, si l'on représente cette quantité par l'ordonnée d'une courbe dont U est l'abscisse, cette courbe aura la forme indiquée ci-dessous.

Fig. 5.



Il résulte de là que, si l'on peut établir que la quantité U est nécessairement comprise entre deux valeurs déterminées U_0 et U_1 répondant à deux valeurs Z_0 et Z_1 de l'ordonnée Z, celle-ci sera nécessairement comprise entre Z_0 et Z_1, et, par suite, $h^{\frac{1}{3}}$ sera inférieur à la plus grande des deux valeurs numériques Z_0 et Z_1.

Il reste donc, pour trouver une valeur numérique en dessous de laquelle $h^{\frac{1}{3}}$ doive nécessairement se trouver pour que la flexion répondant à l'entier n puisse se produire :

1° A déterminer une limite inférieure U_0 et une limite supérieure U_1 de la constante inconnue U;

2° A porter ces deux valeurs dans l'expression

(21) $$\frac{1}{n}\sqrt{U^{\frac{2}{3}} + U^{-\frac{1}{3}}};$$

3° A prendre le plus grand des résultats de ces deux substitutions, et ce sera là une limite supérieure de $h^{\frac{1}{3}}$; ce qui revient à dire que, pour qu'il puisse y avoir flexion, il faudra que $h^{\frac{1}{3}}$ soit compris entre

$$\frac{1}{n}\sqrt{U_0^{\frac{2}{3}} + U_0^{-\frac{1}{3}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sqrt{U_1^{\frac{2}{3}} + U_1^{-\frac{1}{3}}}.$$

ou h compris entre

$$(21\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{U_0+1}{n^3}\sqrt{1+\dfrac{1}{U_0}}, \\ \text{et} \\ \dfrac{U_1+1}{n^3}\sqrt{1+\dfrac{1}{U_1}}. \end{cases}$$

J'observe d'abord qu'il existe nécessairement deux limites entre lesquelles se trouve comprise la constante U. En effet, on ne peut pas avoir $U=0$, autrement tous les éléments de l'intégrale qui forme le second membre de la seconde équation (16) seraient négatifs, et cette équation ne pourrait pas avoir lieu.

On ne peut pas non plus avoir $U=\infty$, car la première (16), en remplaçant R′ par sa valeur, donne

$$h^{-\frac{1}{3}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^{\frac{2}{3}}+(1+uy)\,U^{-\frac{1}{3}}-\frac{u^2}{u}(1-y^2)\,U^{-\frac{2}{3}}}},$$

ou, en faisant $y=\sin\varphi$,

$$h^{-\frac{1}{3}}=\int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{U^{\frac{2}{3}}+(1-u\sin\varphi)\,U^{-\frac{1}{3}}-\frac{u^2}{4}U^{-\frac{2}{3}}\cos^2\varphi}}.$$

Pour $U=\infty$, tous les éléments de l'intégrale du second membre deviendraient nuls, et, comme h est fini, l'équation ne pourrait pas avoir lieu.

Cherchons d'abord une limite inférieure U_0 de U. La seconde (16) devient, en remplaçant R′ par sa valeur (15),

$$(22)\qquad \frac{2\varpi}{n}=\int_{-1}^{+1}\frac{\left[U\frac{uy+1}{2}-\frac{u^2}{4}(1-y^2)\right]dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

Ajoutons et retranchons au crochet la quantité

$$U^2 + U\,\frac{uy+1}{2}.$$

Il viendra

$$\frac{2\varpi}{n} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}\left[\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)} - \frac{U^2+U\,\frac{uy+1}{2}}{\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}\right]$$

$$\frac{2\varpi}{n} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\left(U^2+U\,\frac{uy+1}{2}\right)dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}$$

Les deux intégrales ont tous leurs éléments positifs. Si donc on supprime le terme $\frac{-u^2}{4}(1-y^2)$ sous chacun des deux radicaux où il entre, on augmente chaque élément de la première intégrale, et, par suite, on augmente cette intégrale elle-même, tandis qu'on diminue la seconde; par suite, on augmente le second membre de l'équation. On a donc

$$\frac{2\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{dy\sqrt{U^2+U(uy+1)}}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\left(U^2+U\,\frac{uy+1}{2}\right)dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)}}$$

ou

$$\frac{2\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{U\,\frac{uy+1}{2}\,dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)}}$$

ou

$$\frac{\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{(uy+1)\,dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1+\dfrac{uy+1}{U}}}.$$

Tous les éléments de cette intégrale étant évidemment positifs, l'inégalité sera remplie *a fortiori* si l'on remplace le second radical par sa valeur la plus petite, qui est

$$\sqrt{1+\frac{1-u}{U}}.$$

On aura donc

$$\frac{\varpi}{n} < \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1-u}{U}}}\int_{-1}^{+1} \frac{(1+uy)\,dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$\frac{2\varpi}{n}\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + (1-u^2)\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}}.$$

La première de ces deux intégrales est égale à ϖ. D'autre part, on sait que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\varpi}{\sqrt{a^2-1}},$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}} = \frac{\varpi}{1-u^2}.$$

Par suite, l'inégalité ci-dessus devient

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < 1$$

ou

$$\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < n.$$

Comme on ne peut pas avoir $U = \infty$, on tire de cette inégalité cette

première conséquence importante :

$$u > 1.$$

Ainsi, *l'entier u ne peut pas être égal à* 1; *il ne peut être que* 2, 3, 4, ...

On tire d'ailleurs de la même inégalité

$$U > \frac{1-u}{u^2-1}.$$

Cette inégalité ne suffirait pas à fournir une limite inférieure U_0 de U, puisque la quantité u qui entre dans le second membre n'est pas connue.

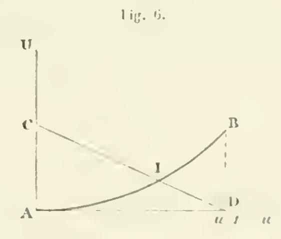
Mais nous avons encore l'inégalité (17)

$$U > \frac{u^2}{4}.$$

Ces deux inégalités réunies fournissent la limite cherchée.

En effet, si l'on représente les seconds membres de ces inégalités par des ordonnées, en prenant u pour abscisse, nous aurons (*fig.* 6) un arc

Fig. 6.



de parabole AB pour représenter la fonction $\frac{u^2}{4}$ et une droite CD coupant l'axe des abscisses au point $u = 1$ pour représenter la quantité $\frac{1-u}{u^2-1}$. Soit I le point d'intersection de cette droite et de la parabole; quel que soit u, U devra être supérieur à l'ordonnée correspondante de la ligne brisée CIB. Donc, U est supérieur à l'ordonnée minima de cette

ligne, c'est-à-dire à l'ordonnée du point I. L'abscisse du point I est fournie par l'équation

$$\frac{u^2}{4} = \frac{1-u}{n^2-1}$$

ou

$$(n^2-1)u^2 + 4u - 4 = 0$$

qui admet deux racines de signes contraires; la racine positive, évidemment seule admissible, est

$$u = \frac{-2+\sqrt{4+4(n^2-1)}}{n^2-1}$$

ou

$$u = \frac{2}{n+1}.$$

L'ordonnée correspondante est

$$\frac{u^2}{4} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi on est assuré que

$$\text{U} > \frac{1}{(n+1)^2},$$

et nous pouvons prendre pour la limite inférieure U_0 que nous cherchons

(23) $$U_0 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Il reste à trouver une limite supérieure U_1 de U. Pour cela, je distingue deux cas, suivant que les éléments de l'intégrale qui forme le second membre de l'équation (22) sont ou non tous positifs.

Le dénominateur de la fraction qui entre sous le signe d'intégration étant essentiellement positif, il faut, pour qu'il puisse y avoir des éléments négatifs, que le numérateur puisse devenir négatif pour certaines valeurs de y. Or, pour $y = \pm 1$, ce numérateur a pour valeurs

$$U - \frac{1 \pm u}{2},$$

valeurs l'une et l'autre positives. Donc, pour que le numérateur puisse devenir négatif, il faut que l'équation

$$U\frac{(1+uy)}{2}-\frac{u^2}{4}(1-y^2)=0$$

ait ses deux racines : 1° réelles; 2° comprises l'une et l'autre entre -1 et $+1$. Ces racines sont

$$y=\frac{-U\pm\sqrt{U^2-2U+u^2}}{u}.$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut que

$$U^2-2U+u^2>0,$$

ce qui exige que l'on ait, soit

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} U>1+\sqrt{1-u^2},\\ \text{soit}\\ U<1-\sqrt{1-u^2}.\end{array}\right.$$

Pour qu'elles soient toutes deux comprises entre -1 et $+1$, il faut que la plus grande des deux en valeur absolue soit moindre que 1, ce qui exige que

$$(\beta)\qquad U+\sqrt{U^2-2U+u^2}<u$$

et, à plus forte raison,

$$U<u \quad\text{ou}\quad u-U>0;$$

puis

$$\sqrt{U^2-2U+u^2}<u-U.$$

ou

$$\sqrt{(u-U)^2-2U(1-u)}<u-U,$$

qui est satisfaite d'elle-même.

Ainsi il faut et il suffit, pour que (β) soit satisfait, que

$$U < u.$$

Par suite, $U < 1$, ce qui indique que la première (α) ne peut pas avoir lieu. Donc

$$U < 1 - \sqrt{1 - u^2}.$$

On vérifie d'ailleurs facilement que

$$u > 1 - \sqrt{1 - u^2}.$$

Donc l'avant-dernière inégalité entraîne celle $U < u$ et exprime, à elle seule, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale dont nous nous occupons comprenne des éléments négatifs. Elle entraîne comme conséquence $U < 1$, de sorte que, s'il y a réellement des éléments négatifs, nous pourrons prendre pour la limite supérieure de U que nous cherchons

$$(24) \qquad U_1 = 1.$$

Admettons donc qu'il n'y ait pas d'éléments négatifs. Alors, si nous remplaçons le radical $\sqrt{R'}$ par la plus grande valeur qu'il puisse prendre, nous diminuerons tous les éléments de l'intégrale, et, comme ils sont, par hypothèse, tous positifs, nous diminuerons l'intégrale elle-même. Cette plus grande valeur, en vertu de (18), est

$$\sqrt{U^2 + U(1 + u)}.$$

Donc, nous aurons l'inégalité

$$\frac{2\varpi}{n} > \frac{1}{\sqrt{U^2 + U(1+u)}} \int_{-1}^{+1} \frac{\left[U\,\frac{uy+1}{2} - \frac{u^2}{4}(1 - y^2)\right]dy}{\left(\frac{1+u^2}{4} + \frac{uy}{2}\right)\sqrt{1 - y^2}}$$

ou

$$\frac{2\varpi}{n}\sqrt{U^2 + U(1+u)} > \int_{-1}^{+1} \frac{[2U(uy+1) - u^2(1-y^2)]\,dy}{(1 + u^2 + 2uy)\sqrt{1 - y^2}}.$$

Cette intégrale peut s'écrire en effectuant la division du numérateur par la partie rationnelle du dénominateur

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left[\frac{uy}{2} + \left(U - \frac{1+u^2}{4} \right) + \frac{(1-u^2)\left(U + \frac{1-u^2}{4} \right)}{1+u^2+2uy} \right],$$

égale, comme on le voit facilement, à

$$2\varpi\left(U - \frac{u^2}{4} \right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sqrt{U^2 + U(1+u)^2} - U + \frac{u^2}{4} > 0,$$

et *a fortiori*

$$\frac{1}{n}\sqrt{U^2 + 2U} > U - \frac{1}{4},$$

et *a fortiori*

$$\frac{1}{n}(U+1) > U - \frac{1}{4}$$

ou

$$U < \frac{n+4}{4(n-1)}.$$

Donc, en résumé, nous pouvons prendre pour limite supérieure le plus grand des deux nombres

$$U_1 = \frac{n+4}{4(n-1)}, \quad U_1 = 1.$$

On voit que, pour $n = 2$, c'est $U_1 = \frac{3}{2}$ qu'il faudra prendre, et pour $n > 2$ ce serait $U_1 = 1$.

Nous avons d'ailleurs trouvé, pour limite inférieure,

$$U_0 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Cela posé, nous avons vu que, pour que la flexion répondant à une valeur de l'entier n soit possible, il faut que h soit compris entre les

deux limites (21 *bis*), savoir

$$\frac{U_0+1}{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{U_0}}$$

et

$$\frac{U_1+1}{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{U_1}}.$$

Et, au contraire, pour qu'elle ne soit pas possible, il suffit de prendre h plus grand que chacun de ces deux nombres, c'est-à-dire plus grand que le plus grand des deux; et, pour qu'aucune flexion ne puisse se produire, il suffit que h soit supérieur à chacun de ces deux nombres, *quel que soit* n.

Or le premier est

$$\frac{1+(n+1)^2}{n^3(n+1)^2}\sqrt{1+(n+1)^2}.$$

On voit que cette quantité décroît quand n croît; sa plus grande valeur a donc lieu pour $n=2$, et elle est moindre que $\frac{4}{9}$.

Le second, 1° si l'on y fait $U_1=1$, donne

$$\frac{2}{n^3}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

qui décroît aussi quand n croît. Sa plus grande valeur répond donc à $n=2$, et elle est beaucoup moindre que $\frac{4}{9}$; 2° si l'on y substitue

$$U_1=\frac{n+4}{4(n-1)},$$

il vient

$$\frac{5n}{4(n-1)n^3}\sqrt{\frac{5n}{n+4}}.$$

On voit qu'elle décroît aussi quand n croît et que sa valeur la plus grande, répondant à $n=2$, est elle-même un peu inférieure à $\frac{4}{9}$.

Donc, en prenant

$$h>\tfrac{4}{9}$$

ou

(25) $$\frac{EI}{p\rho_1^3}>\frac{4}{9},$$

on est assuré qu'aucune flexion ne pourra se produire et le problème que nous nous sommes posé est ainsi résolu.

Il est à remarquer toutefois que, d'après la marche suivie, il n'y a aucune raison pour que le chiffre $\frac{4}{9}$ soit la limite inférieure la plus petite possible. En d'autres termes, il est établi par ce qui précède qu'il *suffit* d'avoir $h > \frac{4}{9}$ pour être assuré de l'impossibilité d'une flexion; mais il se peut, et il est même certain, que des valeurs plus faibles de h pourraient être admises sans danger. Il est intéressant, tout au moins, de rechercher jusqu'où pourraient aller ces valeurs. Or, si, dans les équations (16) et (22), on fait $u = 0$, les quadratures s'effectuent facilement, et l'on trouve

$$l = h = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Soit, pour $n = 2$,

$$h = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}.$$

Donc, pour une valeur infiniment petite de u, on voit que h pourra s'approcher autant qu'on le voudra de $\frac{3}{9}$. Or, nous avons posé

$$u = \frac{a - b}{a + b},$$

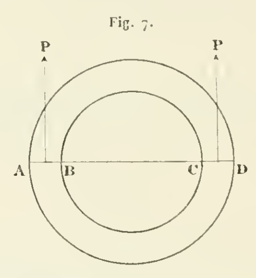
a étant le rayon vecteur maximum, et b le rayon vecteur minimum après la déformation. Donc, supposer u infiniment petit, c'est supposer que ces deux rayons et, par suite, aussi tous les rayons intermédiaires sont très peu différents les uns des autres; c'est donc supposer une déformation très faible de l'anneau circulaire. Ainsi, pour une déformation suffisamment petite, h pourra s'approcher autant qu'on le voudra de $\frac{3}{9}$, et, par suite, pour qu'une déformation infiniment petite ne puisse pas se produire, h devra être supérieur à $\frac{3}{9}$. D'où je conclus que la limite de $\frac{4}{9}$ que nous avons trouvée ne peut pas différer de la limite la plus faible possible, de plus de $\frac{1}{9}$. Au point de vue pratique, il n'y a pas d'inconvénient à prendre h un peu trop fort; au point de vue théorique, il est présumable que la limite la plus faible possible est celle qui répond à la déformation infiniment petite, c'est-à-dire $h = \frac{3}{9}$, parce que, si l'on a donné à un anneau une forme telle qu'il ne puisse pas se déformer infiniment peu, il est *extrêmement probable* qu'*a for*

tiori il ne pourra pas prendre une déformation finie. Toutefois, si cette présomption est exacte, elle doit pouvoir se déduire rigoureusement des équations (16) qui définissent U et u, et c'est ce à quoi je n'ai pas réussi. La question mériterait donc, au point de vue théorique, d'être complétée en ce sens.

§ IV. — Dimensions a donner a un tuyau ouvert aux deux bouts pour éviter qu'il s'aplatisse sous une pression extérieure.

Comme application, supposons un manchon cylindrique de faible épaisseur ε, compris entre deux cylindres concentriques et soumis à une pression normale uniforme de l'extérieur vers l'intérieur. Admettons

Fig. 7.



que le manchon soit assez long pour qu'on puisse le supposer ouvert à ses deux extrémités. Son rayon moyen étant ρ_1, il s'agit de calculer son épaisseur.

Il suffit de considérer une longueur de 1^m.

Si le manchon reste circulaire, que P soit la pression totale exercée dans chacune des deux parties AB et CD d'une section diamétrale, l'équilibre de la moitié du manchon donne la formule connue

$$2P = 2p\rho_1$$

ou

$$P = p\rho_1.$$

Si l'on veut que la pression élastique par unité de surface ne dépasse

pas K kilogrammes, on devra avoir

$$P = K\varepsilon$$

ou

$$p\rho_1 = K\varepsilon.$$

D'où

$$(a) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho_1} = \frac{p}{K}.$$

Mais la valeur de ε ainsi obtenue pourrait ne fournir qu'un équilibre instable, et il faut y adjoindre (en négligeant la différence très faible $\rho_1 - \rho_0$) notre formule

$$\frac{EI}{p\rho_1^2} = \frac{4}{9}.$$

Le moment d'inertie I d'une section CD relativement à son milieu, c'est le moment d'inertie d'un rectangle de hauteur ε et de longueur 1 : il est

$$I = \frac{\varepsilon^3}{12},$$

d'où

$$\frac{E\varepsilon^3}{p\rho_1^3} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3},$$

$$(b) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho_1} = \sqrt[3]{\frac{16p}{3E}}.$$

On devra prendre pour $\frac{\varepsilon}{\rho_1}$ la plus grande des valeurs fournies par les deux inégalités (a) et (b).

Pour que la formule habituelle (a) suffise, il faut que ce soit elle qui donne le plus grand résultat, il faut donc que

$$\frac{p}{K} > \sqrt[3]{\frac{16p}{3E}}$$

ou

$$p > \sqrt{\frac{16K^3}{3E}},$$

$$p > 4K\sqrt{\frac{K}{3E}}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un cylindre en fer et que la pression K qu'on veut adopter soit de 5^{kg} par millimètre carré, soit, en prenant le mètre pour unité,

$$K = 5 \times 10^6.$$

Prenons

$$E = 2 \times 10^{10};$$

pour le coefficient d'élasticité du fer, on aura

$$p > \frac{2 \times 10^5}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$p > \frac{4 \times 10^5}{\sqrt{6}},$$

soit $p > 16^{atm}, 4$.

Ainsi, pour une pression inférieure à $16^{atm}, 4$, l'épaisseur fournie par la formule habituelle serait insuffisante; ce n'est que pour des pressions supérieures qu'elle pourrait être employée; mais, pour des pressions aussi fortes, il sera mieux d'employer la formule exacte que Lamé a déduite des équations de l'élasticité, à savoir

$$K = \frac{\left(\rho_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\rho_1 \varepsilon}$$

qui se réduit à celle (a) si l'on néglige au numérateur $\frac{\varepsilon}{2}$ devant ρ_1.

Ainsi, il conviendra d'employer soit la formule indiquée dans le présent Mémoire, soit celle de Lamé, toutes les fois qu'il s'agira de chaudières ou autres machines cylindriques pressées de l'extérieur vers l'intérieur.

S'il s'agit d'un anneau circulaire de section transversale quelconque (symétrique par rapport au plan du cercle), en désignant par $\mathfrak{S}$ l'aire de cette section, et I son moment d'inertie, la formule habituelle donnera

$$p \rho_1 \leq K \mathfrak{S}$$

ou

$$\mathfrak{S} \geq \frac{p \rho_1}{K}$$

et déterminera la section $\mathfrak{S}$, et notre formule

$$\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_1^3} > \frac{4}{9}$$

déterminera ensuite son moment d'inertie. Ainsi, dans ce cas, la formule habituelle est toujours insuffisante et doit être employée concurremment avec la nouvelle formule que nous indiquons.

Il existe peu d'expériences permettant de contrôler cette théorie : des expériences ont été faites par MM. Love, Fairbairn, Unwin sur des tuyaux fermés aux deux bouts, et M. Unwin (*Éléments de construction*, traduction de M. Bocquet, Gauthier-Villars, 1882, p. 76) dit, au sujet des tuyaux ouverts ou assez longs pour pouvoir être regardés comme tels :

« Quand la longueur excède $43d^2$ ($d = 2\rho_1$, diamètre du tuyau), la résistance devient *probablement* indépendante de la longueur. La résistance devrait donc être calculée comme si la longueur n'était que de $43d^2$. Ainsi, pour des tubes avec joints en long et en travers qui dépassent cette limite de longueur, nous tirons de l'équation (3)

$$p < \frac{197543}{8} \frac{\varepsilon^{2,35}}{\rho_0^3} \text{ (1)}. \text{ »}$$

Ici, c'est le centimètre et le kilogramme qui sont pris pour unité. Je reproche à cette formule de ne pas pouvoir devenir homogène même si l'on rétablit le coefficient d'élasticité E à la place du coefficient numérique du second membre. D'autre part, cette longueur de $43d^2$, à partir de laquelle on suppose que l'épaisseur à donner devient indépendante de la longueur, semble un peu arbitraire. Ma formule avec

(1) Je substitue mes notations à celles de l'auteur. L'équation (3) dont il parle est la formule empirique suivante :

$$p = 1092954 \frac{\varepsilon^{2,35}}{l^{0,9} \times (2\rho_0)^{1,16}},$$

l étant la longueur du tuyau supposé fermé aux deux bouts.

les mêmes unités donnerait

$$p < \frac{3}{16} \times 2 \times 10^6 \left(\frac{\varepsilon}{\rho_0} \right)^3,$$

(26) $$p < \frac{300\,000}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_0} \right)^3.$$

En remplaçant, dans la formule de M. Unwin, le nombre 197543 par 200 000, on voit que cette formule coïncide avec la nôtre, quels que soient la pression p et le diamètre du tuyau; pour l'épaisseur ε exprimée en centimètres, par

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{0,65}}.$$

Pour d'autres valeurs de ε, elles différeraient; mais nous pensons que notre formule théorique mérite plus de confiance qu'une formule empirique et non homogène, qui ne résulte d'ailleurs pas d'expériences directes.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, si l'on parvient à démontrer rigoureusement que, dans l'inégalité (25), il est permis de remplacer $\frac{1}{9}$ par $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, suivant la remarque de la page 37, on devra adopter ce dernier chiffre dans les applications.

Paris, 24 septembre 1883.

Théorie des actions électrodynamiques les plus générales qui puissent être observées (¹);

PAR M. PAUL LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques.

---

§ I. — INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire a pour objet d'établir, avec plus de rigueur qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les formules découvertes par Ampère et représentant l'action électrodynamique la plus générale que l'on puisse observer sur un élément linéaire de courant fixe, d'intensité constante, et ne faisant pas partie du système agissant. Celui-ci pourra comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre.

2. En créant l'Électrodynamique, Ampère a résolu un problème plus général, celui de l'action mutuelle de deux éléments de courants linéaires; puis, Grassmann et M. Reynard en ont proposé une solution différente. Le désaccord disparaît quand on calcule la résultante des actions de tous les éléments d'un contour fermé sur un élément de courant; mais les données seules de l'expérience peuvent le faire disparaître indépendamment de toute hypothèse : je n'en connais pas

(¹) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 25 janvier 1885.

de démonstration plus ancienne que celle que j'ai donnée en 1874, et que je reproduis dans ce Mémoire. M. Maurice Lévy a déduit ce résultat d'un autre beaucoup plus général en 1881, mais en réduisant le système agissant à un courant fermé linéaire. Ma démonstration s'étend au cas où ce système peut renfermer aussi des courants fermés à trois dimensions, des aimants et le magnétisme terrestre.

3. Deux méthodes sont successivement employées : la première repose, comme celle d'Ampère, sur les cas d'équilibre les plus simples, et la seconde sur des données expérimentales incontestables : Weber a vérifié, en effet, avec beaucoup de précision, que les actions mutuelles de deux courants fermés linéaires sont celles qu'Ampère a fait connaître. Des vérifications ultérieures ont prouvé que les actions d'un aimant et du magnétisme terrestre sur un courant fermé sont aussi celles qui résultent des formules d'Ampère. Cela posé, la seconde méthode exige uniquement que l'on admette que l'action cherchée se réduit, comme la première le démontre, à une force unique, appliquée à l'élément qui la reçoit. La seconde est actuellement la meilleure au point de vue de la certitude des données expérimentales: mais la première sera préférable, quand deux anciennes expériences auront été refaites avec toute la précision désirable : elle établira les mêmes formules avec la même rigueur et plus de généralité.

4. L'action est calculée en fonction explicite du potentiel du système agissant, potentiel dont l'existence est démontrée dans tous les cas, mais dont la forme n'est trouvée que dans celui où le système se réduit à un courant fermé linéaire.

5. Le calcul des potentiels d'un aimant et du magnétisme terrestre sera fait dans un autre Mémoire, et identifiera ces potentiels avec ceux qui représentent les actions de l'aimant et du magnétisme terrestre sur un autre aimant : d'où résultera la possibilité, admise jusqu'ici sans démonstration, et quelquefois contestée, de réduire à un seul système d'unités absolues toutes les actions observables entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre.

6. Les axes étant supposés fixes, ainsi que la ligne fermée et rigide

d'un courant, le potentiel de celui-ci est une fonction périodique des coordonnées, c'est-à-dire peut se décomposer en deux parties : l'une bien définie, infiniment petite à l'infini, et identique avec le potentiel d'un système fictif, qu'on appelle un *feuillet magnétique;* l'autre $\pm 4m\pi I'$, dans laquelle I' désigne l'intensité du courant, et *m* un nombre entier. Cette périodicité résulte de la loi d'Œrstedt, en vertu de laquelle un courant exerce sur le pôle nord d'un solénoïde (il faudrait dire d'un aimant, s'il en était question dans ce Mémoire) une force dont le travail est toujours positif, quand le pôle se déplace vers la gauche du courant. Ainsi un courant électrique permanent peut entretenir un travail perpétuel; propriété qui prouve par elle-même, comme on le sait d'ailleurs, que l'entretien d'un tel courant exige alors un certain travail perpétuel.

7. On obtient une autre propriété importante de la même *force directrice* d'Ampère, en la considérant comme la vitesse d'un fluide fictif : elle satisfait à l'équation différentielle exprimant que ce fluide est incompressible, et par suite définit ce qu'on appelle le *flux de force* envoyé, par le système agissant, sur la face négative du feuillet magnétique équivalent à un courant linéaire fermé. Lorsque l'intensité de celui-ci demeure égale à l'unité et que le système agissant est fixe et permanent, on sait que la variation de ce flux exprime le travail virtuel des actions qui solliciteraient la ligne du courant, supposée mobile, si elles conservaient, dans chaque position successive, les valeurs qu'on y observe au repos. La réalité de cette hypothèse, ne pouvant être démontrée dans ce Mémoire, le sera dans un autre sur l'induction.

8. Deux hypothèses sont aujourd'hui en présence dans la théorie des forces physiques, et en particulier de l'Électrodynamique : celle des actions directes à distance et celle d'un milieu continu qui les propage. Ampère a adopté la première, et M. Reynard la seconde : de là vient le désaccord de leurs formules élémentaires. Mais, pour la question restreinte qui fait l'objet de ce Mémoire, on n'a jamais proposé d'autre solution que celle d'Ampère. C'est pourquoi il convient de n'admettre, outre les données de l'expérience, que des principes qui résultent de la première hypothèse, et aussi de la seconde. Comme

l'une ou l'autre est nécessairement vraie, l'exactitude des résultats sera subordonnée uniquement à celle des observations.

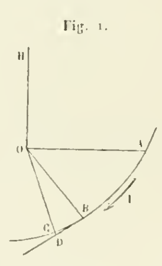
9. Voici les résultats des deux expériences qu'il faudrait refaire pour démontrer, dans toute leur généralité, les principes invoqués dans la première méthode.

10. L'action d'un système fixe et permanent, susceptible de comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, ne peut faire tourner un arc circulaire de rhéophore, mobile dans son plan autour de son centre.

11. Elle ne peut faire tourner autour de son axe de révolution un fil cylindrique, parcouru longitudinalement par un courant.

La détermination de l'action du système sur un élément de courant I.BC (*fig.* 1), d'intensité I et de longueur BC, est un problème à six in-

Fig. 1.



connues : cette action étant réductible à une force appliquée en B et à un couple, soient X, Y, Z les composantes de la force, et L, M, N celles du couple, quand on prend B pour origine, et la tangente BD pour axe des x. Il résulte des équilibres n^os **10** et **11** que les six inconnues se réduisent à deux Y et Z, c'est-à-dire que les quatre autres sont nulles. Voici comment cette réduction peut se faire, en apportant dans la démonstration que j'en ai donnée en 1874 une simplification que M. Maurice Lévy a bien voulu indiquer dans son Cours du Collége de France.

L'action du système, ne pouvant faire tourner autour de son axe de révolution OH (*fig.* 1) l'arc circulaire AB d'Ampère, quelle qu'en soit

la longueur, ne peut faire tourner AC, ni l'élément BC, ni l'élément rectiligne BD de la tangente en B, qui peut être pareillement substitué à tout arc infiniment petit tangent en B, quels qu'en soient le plan et le rayon. Donc le système ne peut faire tourner l'élément de courant I.BD autour d'aucun axe OH, situé dans le plan qui lui est perpendiculaire au point B, et ne passant pas par ce point : mais la continuité écarte cette restriction; et l'action, nécessairement réductible à une force appliquée en B et à un couple, doit avoir un moment nul par rapport à cet axe : ce qui démontre, quand l'axe passe par B, que le couple est dans le plan normal, et quand il n'y passe pas, que la force est dans ce même plan. L'équilibre (**11**) démontre ensuite que le couple est nul.

§ II. — Actions sur un élément de courant, en fonction du potentiel de tout système extérieur qui les produit, et détermination du potentiel d'un élément de solénoïde, c'est-à-dire d'un courant linéaire fermé, plan et infiniment petit.

Notations et définitions.

12. Soient

(1) $\mathcal{M}'$ et I ds

le système le plus général dont l'action soit observable, et l'élément de courant linéaire qui la reçoit; ce qui exige que $\mathcal{M}'$ soit un système rigide et invariable dans sa constitution physique, c'est-à-dire ne comprenant que des courants fermés permanents, des aimants dont le magnétisme est réduit à sa partie rigide, et le magnétisme terrestre; que l'intensité I soit constante, et que l'élément linéaire ds soit fixe par rapport à $\mathcal{M}'$.

13. Le *travail virtuel* d'un système quelconque de forces électrodynamiques sera défini en convenant de considérer les forces telles qu'elles seraient, dans chaque position successive, si les corps qui réagissent étaient en repos, et si leurs constitutions physiques étaient invariables pendant toute la durée du mouvement. Les phénomènes de l'induction prouveront que la première hypothèse est vraie; on sait que la seconde ne l'est pas.

14. La notation

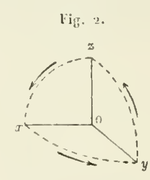
$$(2) \qquad (\mathfrak{M}', \mathfrak{M})$$

représentera l'action d'un système $\mathfrak{M}'$ sur un autre $\mathfrak{M}$; le système agissant $\mathfrak{M}'$ sera écrit le premier; il sera généralement accentué.

15. Les moments des forces auront les signes des rotations qu'elles tendent à produire : les rotations d'un quadrant yz, zx, xy (*fig.* 2) seront positives dans les trois plans coordonnés. La partie positive d'un axe sera prise pour normale positive du plan des deux autres.

16. Les axes seront toujours rectilignes, rectangulaires et disposés *à gauche* (*fig.* 2), ou de manière qu'un observateur puisse avoir les

Fig. 2.



parties positives des axes des x, des y et des z devant lui, *à sa gauche* et sur sa tête; ou encore qu'il voie la partie positive de l'un de ces axes *à sa gauche,* quand il est parcouru des pieds à la tête en vertu d'une rotation positive dans le plan perpendiculaire.

17. En vertu des deux conventions (nos **15** et **16**), la *normale positive*

$$(3) \qquad \mathfrak{L}$$

de l'élément $\lambda = dA$ d'une aire A, plane ou courbe, dont le périmètre S est parcouru dans le *sens positif* par un point mobile des pieds à la tête d'un observateur, sera visible à sa gauche. Dans le cas d'un courant fermé infiniment petit, ce point représentera une molécule d'électricité positive.

17′. Cette normale serait dirigée (**15**) en sens contraire, dans un système d'axes à droite.

18. La normale positive ζ d'un élément de solénoïde sera appelée son *axe*, ainsi que toute courbe L ayant cette normale pour tangente positive. Soient

$$(4)\qquad x,\ y,\ z \quad \text{et} \quad x_s,\ y_s,\ z_s$$

les coordonnées d'un point fixe sur l'élément plan $\lambda = dA$, et celles d'un point mobile dans le sens positif sur son contour S, dont il termine la partie s;

$$(5)\qquad u,\ v,\ w \quad \text{et} \quad u_s,\ v_s,\ w_s$$

les valeurs de trois fonctions quelconques des coordonnées en ces deux points; et

$$(6)\qquad \alpha = \frac{\partial x}{\partial \zeta},\quad \beta = \frac{\partial y}{\partial \zeta},\quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

les *cosinus directeurs* de son axe ζ, c'est-à-dire les cosinus des angles qu'il fait avec les axes des coordonnées. On a identiquement, avec des axes à gauche,

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^S \left(u_s \frac{\partial x_s}{\partial s} + v_s \frac{\partial y_s}{\partial s} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right) ds \\ &\quad = \iint_A \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA, \end{aligned} \right.$$

formule qui subsiste (nos **15** et **16**) avec des axes à droite. Le choix des axes à gauche, indifférent au point de vue purement géométrique, a pour unique but la conformité à l'usage de donner le signe + au pôle nord d'un solénoïde.

19. Soit $\mathcal{S}$ un *solénoïde*, défini un système d'*éléments k de solénoïde*, c'est-à-dire de courants linéaires fermés, plans et infiniment petits, d'intensités constantes I, d'aires λ, ayant pour axe commun (no **18**) une ligne L, appelée aussi l'*axe* du solénoïde, dont ζ désigne un arc, et partagée par les aires λ en éléments $\delta\zeta$, assujettis à la relation

$$(8)\qquad \frac{I\lambda}{\delta\zeta} = \text{une constante } \mu.$$

Démonstration de l'existence du potentiel V du système M'.

20. Cette démonstration repose sur le principe de l'indépendance des actions simultanées, qui sera passé sous silence, parce qu'il est incontestable. Il se déduit immédiatement de l'hypothèse des actions directes à distance, et résulte aussi de celle d'un milieu continu qui les propage, en vertu du principe de la superposition des petits mouvements : il ne pourrait être en défaut que pour des intensités trop grandes, et c'est ce qu'on n'a jamais observé.

La démonstration repose en outre sur cinq principes expérimentaux, dont quatre seulement sont distincts. Voici comment on peut les énoncer.

21. L'action du système M' (notation 1) sur un système de deux éléments de courants linéaires égaux, superposés et de sens contraires, est nulle. Cet équilibre, qu'Ampère a découvert par une expérience grossière, est démontré par des expériences très précises.

22. Il en résulte qu'en désignant par x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées du commencement et de la fin de ds, par rapport à trois axes rectangulaires fixés à M', ce système agit sur l'élément de courant linéaire $\mathrm{I}ds$ (notation 1) comme sur l'ensemble de ses trois *composantes* $\mathrm{I}dx$, $\mathrm{I}dy$ et $\mathrm{I}dz$. La démonstration peut se faire en déduisant du principe (n° **21**) que l'action de M' sur un courant linéaire, d'intensité I, parcourant le périmètre du quadrilatère gauche qui a pour côtés dx, dy, dz et ds, est du même ordre de grandeur que $\mathrm{I}(ds)^2$. Elle est préférable à l'expérience directe, mais grossière, par laquelle Ampère a découvert le principe.

23. L'action de M' sur $\mathrm{I}ds$ se réduit à une force unique, appliquée en un point de ds, par exemple au point (x, y, z).

24. Cette force est normale à ds.

Ces deux derniers principes résultent des cas d'équilibre (n^{os} **10** et **11**).

25. Le système M' n'agit point sur un solénoïde extérieur, fermé, rigide, et fixe par rapport à lui.

26. L'expérience d'Ampère, sur laquelle repose le principe (nº **24**), n'ayant jamais été faite d'une manière satisfaisante, permettrait de douter de ce principe, si la seconde méthode ne le démontrait *a posteriori*, comme elle démontre tous les autres, excepté le principe (nº **25**). Il serait à désirer qu'elle fût refaite, non seulement parce qu'elle démontrerait ce dernier, qui, d'ailleurs, n'a jamais été contesté, mais parce qu'elle s'étendrait au cas de l'action d'un courant fermé permanent à trois dimensions, cas qui échappe à la seconde méthode, à moins qu'on ne fasse une hypothèse, dont elle affranchirait la théorie.

27. Voici comment l'existence de la fonction V peut se déduire des quatre principes (nºˢ **21, 23, 24, 25**) et du principe (nº **22**), qui en résulte. Chacune des actions de M' sur

$$I\,dx,\quad I\,dy,\quad I\,dz$$

se réduit (nº **23**) à une force unique, appliquée au point (x, y, z), ayant pour projections :

Sur l'axe des x..........	$GI\,dx$,	$CI\,dy$,	$B'I\,dz$;
Sur l'axe des y..........	$C'I\,dx$,	$HI\,dy$,	$AI\,dz$;
Sur l'axe des z..........	$BI\,dx$,	$A'I\,dy$,	$KI\,dz$,

lorsque dx, dy et dz sont positives, et, par suite (nº **21**), quels qu'en soient les signes; les neuf fonctions

$$(9)\qquad A,\ B,\ C;\quad A',\ B',\ C';\quad G,\ H,\ K$$

de x, y, z étant évidemment bien déterminées quand on donne, en outre, les quantités géométriques et physiques qui déterminent M'. Ce système produit (nº **25**) sur $I\,ds$ une force unique, appliquée au point (x, y, z), et ayant (nº **22**) pour projections sur les axes

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi I\,ds = I(G\,dx + C\,dy + B'\,dz), \\ \eta I\,ds = I(C'\,dx + H\,dy + A\,dz), \\ \zeta I\,ds = I(B\,dx + A'\,dy + K\,dz). \end{cases}$$

On exprime que M' agit (n° **24**) normalement sur dx, dy, dz et ds, en posant

$$G = 0, \quad H = 0, \quad K = 0 \quad \text{et} \quad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = 0.$$

En vertu des trois premières équations, la quatrième, quand on y substitue (10), se réduit à

$$(A + A')\,dy\,dz + (B + B')\,dz\,dx + (C + C')\,dx\,dy = 0,$$

puis celle-ci, pour $dx = 0$, à $A + A' = 0$; pour $dy = 0$, à $B + B' = 0$; et pour $dz = 0$, à $C + C' = 0$: d'où résultent les formules d'Ampère

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &(M', I\,ds)_x \quad \text{ou} \quad \xi I\,ds = I(C\,dy - B\,dz),\\ &(M', I\,ds)_y \quad \text{ou} \quad \eta I\,ds = I(A\,dz - C\,dx),\\ &(M', I\,ds)_z \quad \text{ou} \quad \zeta I\,ds = I(B\,dx - A\,dy). \end{aligned}\right.$$

La méthode qui va déterminer A est empruntée à un autre calcul, fait en 1869 par M. Bertrand, dans son Cours du Collège de France.

28. En supposant que l'élément $I\,ds$ fasse partie d'un courant linéaire fermé et rigide $\mathfrak{S}$, d'intensité constante I et de longueur S, animé, à l'instant t, d'une vitesse de translation v à l'origine, et d'une vitesse angulaire ω, ayant pour composantes

$$v_x,\ v_y,\ v_z \quad \text{et} \quad \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z,$$

le travail élémentaire *virtuel* (n° **15**) des actions de M' sur $I\,ds$, dans le temps dt, est

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} d\varpi(M', I\,ds) = I\,[&\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z + (\zeta y - \eta z)\,\omega_x\\ &+ (\xi z - \zeta x)\,\omega_y + (\eta x - \xi y)\,\omega_z]\,ds\,dt, \end{aligned}\right.$$

ce qui donne, pour le travail élémentaire *virtuel* des actions de M' sur $\mathcal{C}$,

$$(12') \quad d\tau(M', \mathcal{C}) = I \left\{ \begin{aligned} & v_x \int_0^S \xi_s \, ds + \omega_x \int_0^S (\zeta_s y_s - \eta_s z_s) \, ds \\ & + v_y \int_0^S \eta_s \, ds + \omega_y \int_0^S (\xi_s z_s - \zeta_s x_s) \, ds \\ & + v_z \int_0^S \zeta_s \, ds + \omega_z \int_0^S (\eta_s x_s - \xi_s y_s) \, ds \end{aligned} \right\} dt.$$

On déduit des équations (11) et (12'), pour la somme des composantes et pour la somme des moments, par rapport à l'axe des x, des actions de M' sur $\mathcal{C}$,

$$(13) \qquad (M', \mathcal{C})_x = I \int_0^S \xi_s \, ds = I \int_0^S \left(C_s \frac{\partial y_s}{\partial s} - B_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right) ds.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (M', \mathcal{C})_{yz} &= I \int_0^S (\zeta_s y_s - \eta_s z_s) \, ds \\ &= I \int_0^S \left[(B_s y_s + C_s z_s) \frac{\partial x_s}{\partial s} - A_s y_s \frac{\partial y_s}{\partial s} - A_s z_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right] ds. \end{aligned} \right.$$

Soit Λ une aire assujettie uniquement à avoir S pour périmètre. Transformant les troisièmes membres de (13) et (14) au moyen de l'identité (7), appliquée aux fonctions $u = 0$, $v = C$, $w = -B$, puis aux fonctions $u = By + Cz$, $v = -Ay$, $w = -Az$, et posant

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & X = y \frac{\partial A}{\partial z} - z \frac{\partial A}{\partial y}, \quad Y = z \frac{\partial A}{\partial x} + y \frac{\partial B}{\partial z} + z \frac{\partial C}{\partial z} + C, \\ & Z = -y \frac{\partial A}{\partial x} - y \frac{\partial B}{\partial y} - z \frac{\partial C}{\partial y} - B, \end{aligned} \right.$$

on a

$$(16) \qquad (M', \mathcal{C})_x = I \iint_\Lambda \left[-\alpha \left(\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right] d\lambda.$$

$$(17) \qquad (M', \mathcal{C})_{yz} = I \iint_\Lambda \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} \left(X \frac{\partial x}{\partial \mathcal{L}} + Y \frac{\partial y}{\partial \mathcal{L}} + Z \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} \right) \partial \mathcal{L}.$$

29. Dans le cas où le courant $\mathcal{C}$ se réduit à un élément k de sole-

noïde, et A à l'élément plan λ, l'intégrale de l'expression (17), étendue à tous les éléments de l'axe L du solénoïde s, extérieur à M', donne, en y substituant (8),

$$(18)\qquad (M', s)_{yz} = \mu \int_0^I \left(X \frac{\partial x}{\partial \zeta} + Y \frac{\partial y}{\partial \zeta} + Z \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) d\zeta.$$

Du principe (n° **25**), établi par l'expérience pour des solénoïdes fermés, dans lesquels I, λ et $\partial \zeta$ sont trois constantes, satisfaisant dès lors à la condition (8), il résulte que l'intégrale (18) est nulle, toutes les fois que la ligne fermée L est susceptible d'engendrer une aire ayant tous ses points en dehors de M', par une déformation continue qui en réduit la longueur à zéro; ce qui démontre l'existence, en tout point (x, y, z) extérieur à M', d'une fonction des trois variables indépendantes x, y, z, ayant pour dérivée totale $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. Donc, en tout point (x, y, z) extérieur à M', on a les trois identités

$$(19)\qquad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

et, en substituant (15) dans les deux premières,

$$-2\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$
$$- y\left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right) - z\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}\right) + z\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\right) = 0,$$

équations qui doivent subsister indépendamment du choix des axes. En les déplaçant parallèlement à eux-mêmes, on voit que les six parenthèses sont identiquement nulles, et l'on a

$$(20)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$$(21)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

en déduisant, par permutation tournante, les deux premières équa-

tions (21) de la troisième. Ces trois équations démontrent l'existence, en tout point (x, y, z) extérieur à M', d'une fonction

$$(22) \qquad V_{M'}(x, y, z) \quad \text{ou simplement} \quad V,$$

dite le *potentiel* du système M' au point (x, y, z), ayant pour dérivées

$$(23) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -A, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -B, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -C;$$

et en substituant (23) dans (20), on obtient l'équation de Laplace, que cette fonction identifie en tout point (x, y, z) extérieur à M',

$$(24) \qquad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

30. *Calcul de l'énergie $W_{M,k}$ de l'action du système M' sur l'élément k de solénoïde, en fonction du potentiel de M'.* — Le *moment* de l'élément k de solénoïde est défini par le produit

$$(25) \qquad k = I\lambda,$$

et *l'énergie de l'action du système M' sur l'élément k de solénoïde*, par la fonction

$$(26) \quad W_{M,k} = k\frac{\partial V}{\partial \zeta} = k\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right] = -k(A\alpha + B\beta + C\gamma),$$

dans laquelle entrent les formules (25), (23) et les notations (22), (9) et (6). Elle jouit de la propriété suivante : le rapport

$$(27) \qquad \frac{W}{k} = \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \text{une fonction isotrope de } x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \text{ seulement},$$

c'est-à-dire que ce rapport est indépendant du choix des axes, et de toute quantité, géométrique ou physique, relative à k, et indépendante de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

On peut donc, pour simplifier, prendre le point (x, y, z) pour origine; et si le déplacement de k, dans le temps dt, se réduit à la rotation $d(yz) = \omega_x dt$, effectuée autour de l'axe des x, la variation de la

fonction $-$ W, dans laquelle A, B, C ne dépendent que de x, y, z, sera

$$(28)\quad -\frac{\partial W}{\partial(yz)}\omega_x\,dt = \mathrm{k}\left[A\frac{\partial\alpha}{\partial(yz)} + B\frac{\partial\beta}{\partial(yz)} + C\frac{\partial\gamma}{\partial(yz)}\right]\omega_x\,dt = \mathrm{k}(\beta C - \gamma B)\,\omega_x\,dt.$$

Or, en ajoutant et retranchant $\alpha\frac{\partial A}{\partial x}$ dans le crochet (16), on obtient, en vertu de (13), (20), (25) et (26), lorsque A se réduit à un seul élément λ,

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{I}\displaystyle\int_0^S \xi_s\,ds = (M', k)_x = \mathrm{k}\left(\alpha\frac{\partial A}{\partial x} + \beta\frac{\partial B}{\partial x} + \gamma\frac{\partial C}{\partial x}\right) \\ \qquad = \mathrm{k}\,\dfrac{\partial(A\alpha + B\beta + C\gamma)}{\partial x} = -\dfrac{\partial W}{\partial x}. \end{cases}$$

Les fonctions (15) se réduisent à $X = 0$, $Y = C$, $Z = -B$; et l'on déduit de (14), (17), (25), (26) et (28)

$$(30)\quad \begin{cases} \mathrm{I}\displaystyle\int_0^S (\zeta_s y_s - \eta_s z_s)\,ds = (M', k)_{yz} = \mathrm{k}\left(C\frac{\partial y}{\partial \zeta} - B\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) \\ \qquad = \mathrm{k}(\beta C - \gamma B) = -\dfrac{\partial W}{\partial(yz)}. \end{cases}$$

Substituant dans (12'), on trouve

$$d\tilde{\varepsilon}(M', k) = \left(-\frac{\partial W}{\partial x}v_x - \ldots - \frac{\partial W}{\partial(yz)}\omega_x - \ldots\right)dt,$$

ou

$$(31)\quad d\tilde{\varepsilon}(M', k) = -\frac{\partial W}{dt}\,dt,$$

$$(32)\quad \Delta\tilde{\varepsilon}(M', k) = W_1 - W_2.$$

L'équation (32), obtenue en intégrant (31) de $t = t_1$ à $t = t_2$, exprime que le travail virtuel (n° **15**) des actions du système rigide M' sur k, dans le mouvement de k relatif à M', est indépendant des positions relatives intermédiaires, propriété qui va servir à déterminer la forme de

la fonction (26), dans le cas où M' se réduit à un élément k' de solénoïde, auquel s'appliqueront les définitions (3), (n° **18**), (4), (6), (n° **19**), (8) et (25), avec les mêmes notations accentuées.

Détermination du potentiel $V_{k'}$ d'un élément k' de solénoïde, et de l'énergie $W_{k',k}$ de l'action d'un élément k' de solénoïde fixe sur un autre k.

31. La propriété (27) s'étend au rapport $\frac{1}{\mathrm{k}\mathrm{k}'} W_{k',k}$: il est indépendant de toute quantité relative à k et indépendante de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$; et, à cause de sa symétrie, il l'est aussi de toute quantité relative à k' et indépendante de $x', y', z', \alpha', \beta', \gamma'$. Donc

$$(33) \qquad \frac{W_{k',k}}{\mathrm{k}\mathrm{k}'} = F(x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$$

est indépendant de toute quantité relative soit à k, soit à k', et indépendante des douze variables (33).

32. Si k et k' sont des éléments des deux solénoïdes s et s', on a, en vertu des équations (8) et (25),

$$(34) \qquad \mathrm{k} = \mu\,\partial\zeta, \quad \mathrm{k}' = \mu'\,\partial\zeta',$$

et l'on déduit de (31)

$$(35) \qquad d\tau(s', s) = -\frac{dW_{s',s}}{dt}\,dt,$$

en posant

$$(36) \qquad W_{s',s} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\int_{\zeta'_0}^{\zeta'_1} \frac{\partial^2 W_{k',k}}{\partial\zeta\,\partial\zeta'}\,d\zeta\,d\zeta'.$$

Cette fonction (36), à cause de la propriété (33), est *l'énergie de l'action du solénoïde s' sur le solénoïde s*; et l'on déduit de (33) et (34)

$$(37) \qquad W_{s',s} = \mu\mu' \int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\int_{\zeta'_0}^{\zeta'_1} F(x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')\,d\zeta\,d\zeta'.$$

Si la ligne L′ est fermée, et si I′, λ′ et $d\varsigma'$ sont trois constantes, s' n'agit pas sur k, puisque k n'agit pas (nº 25) sur s'. L'équation (28) et les deux autres analogues montrent que les fonctions A, B, C sont alors nulles, et l'équation (26), que $W_{s',k}$ l'est aussi. Donc l'intégrale double (37), étant l'intégrale par rapport à L de $W_{s',k}$, est nulle, quand la ligne d'intégration L′ est fermée. On verra pareillement qu'elle est nulle, quand la ligne L est fermée. Or on sait que, lorsqu'une intégrale double, de la forme (37), jouit de ces deux propriétés, la fonction F est de la forme $\frac{\partial^2 f(x, y, z, x', y', z')}{\partial\varsigma . \partial\varsigma'}$, et que f est une fonction bien définie des six coordonnées, indépendante de leurs dérivées d'ordre quelconque et particulièrement des six cosinus directeurs $\alpha = \frac{\partial x}{\partial\varsigma}$, $\beta = \frac{\partial y}{\partial\varsigma}$, $\gamma = \frac{\partial z}{\partial\varsigma}$, $\alpha' = \frac{\partial x'}{\partial\varsigma'}$, ...: (33) devient

$$(38)\qquad W_{k',k} = \mathrm{kk}'\frac{\partial^2 f(x, y, z, x', y', z')}{\partial\varsigma\,\partial\varsigma'}.$$

Mais on a vu (27) que la fonction W est indépendante du choix des axes. Donc f ne peut dépendre que des quatre variables

$$(39)\qquad r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},\quad \frac{\partial r}{\partial\varsigma},\quad \frac{\partial r}{\partial\varsigma'},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial\varsigma\,\partial\varsigma'},$$

qui définissent les positions relatives des axes de deux éléments de solénoïdes. D'ailleurs f est indépendante des trois dernières, fonctions des coordonnées et des cosinus directeurs; par suite

$$(38')\qquad W_{k',k} = \mathrm{kk}'\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial\varsigma\,\partial\varsigma'}.$$

Or on a, en substituant (24) dans (27), $\Delta_2 W_{k',k} = 0$, puis cette relation dans (38′),

$$\frac{\partial^2 \Delta_2\varphi(r)}{\partial\varsigma\,\partial\varsigma'} = 0.$$

$\frac{\partial\Delta_2\varphi(r)}{\partial\varsigma'}$, fonction de r indépendante du déplacement $d\varsigma$ de l'extré-

inute (x, y, z) de r, ne peut être qu'une constante, laquelle, assujettie

Fig. 3.



en même temps à changer de signe avec ds', ne peut être différente de zéro :

$$\Delta_2 \varphi(r) = \text{une constante } 6h,$$

ou

$$2r\varphi' + r^2\varphi'' - 6hr^2 = 0,$$

équation dont l'intégrale première est $r^2\varphi' - 2hr^3 =$ une constante $= f$; d'où $\varphi' = 2hr + \frac{f}{r^2}$ et

(10) $$\varphi = \varphi_0 + hr^2 - \frac{f}{r}.$$

En désignant par

(11) $$\varepsilon,\ \theta \text{ et } \theta' \ (fig.\ 3)$$

les angles que ds et ds' font entre eux et avec r, (38') devient

(12) $$\begin{cases} W_{k,k'} = kk'\left(-h \dfrac{d^2 r^2}{ds\, ds'} + f \dfrac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\, ds'} \right) \\ \phantom{W_{k,k'}} = kk'\left(h\cos\varepsilon + f \dfrac{\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'}{r} \right). \end{cases}$$

Le terme en f est infiniment petit avec $\frac{1}{r}$ dans le moment (30), calculé en prenant le point (x, y, z) pour origine; et le terme en h, $-kk'h\frac{\partial \cos\varepsilon}{\partial(rz)}$, doit l'être aussi, toute action physique observable étant infiniment petite à l'infini. Mais ce terme est indépendant de la distance : donc $h = 0$; et la fonction (40), débarrassée du terme inutile φ_0, qui n'entre pas dans (38'), se réduit à

$$(43) \qquad \varphi = \frac{f}{r}.$$

33. Le coefficient f est positif. En effet, le *pôle négatif* et le *pôle positif*

$$(44) \qquad n \text{ ou } n', \quad p \text{ ou } p'$$

d'un solénoïde s (nº **19**) ou s' étant définis le commencement et la fin de son axe L (nº **19**) ou L', l'équation (37) devient

$$(45) \qquad \begin{cases} W_{s',s} = f\mu\mu' \displaystyle\int_0^{L}\int_0^{L'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\zeta'}\,d\zeta\,d\zeta' \\ \qquad = f\mu\mu'\left(\dfrac{1}{r_{p,p'}} - \dfrac{1}{r_{p,n'}} - \dfrac{1}{r_{n,p'}} + \dfrac{1}{r_{n,n'}}\right); \end{cases}$$

d'où, en appliquant (35),

$$(46) \qquad d\varpi(s', s) = -f\mu\mu'\left(\frac{\frac{d}{dt}r_{p,p'}}{r_{p,p'}^2} - \frac{\frac{d}{dt}r_{p,n'}}{r_{p,n'}^2} - \frac{\frac{d}{dt}r_{n,p'}}{r_{n,p'}^2} + \frac{\frac{d}{dt}r_{n,n'}}{r_{n,n'}^2}\right)dt,$$

expression du travail élémentaire virtuel (nº **15**) du solénoïde fixe s' sur le solénoïde s, mobile de manière que son axe L, déformé ou non, conserve une longueur invariable. On voit que les actions exercées par s' sur s se réduisent à quatre forces entre leurs pôles, dont deux sont attractives et deux répulsives, et que les pôles p et p' s'attireraient si le coefficient f était négatif. L'expérience apprend qu'ils se

repoussent ; donc f est positif et (42) devient

$$(47)\qquad W_{k',k} = f\mathrm{k}\mathrm{k}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\zeta'} = f\mathrm{k}\mathrm{k}'\frac{\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'}{r^3}, \quad f > 0.$$

Mais (26)

$$W_{k',k} = \mathrm{k}\frac{\partial V_{k'}}{\partial\zeta};$$

d'où

$$0 = \mathrm{k}\,\frac{\partial\left(V_{k'} - f\mathrm{k}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta'}\right)}{\partial\zeta}$$

et, par suite,

$$(48)\qquad V_{k'} = f\mathrm{k}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta'} + V_0.$$

54. On verra que la constante arbitraire V_0 a une infinité de valeurs en progression arithmétique. On voit actuellement qu'on peut la supprimer, sans rien changer aux actions de k', $V_{k'}$ n'y entrant que par ses dérivées, et réduire cette fonction à la suivante :

$$(49)\qquad v_{k'} = f\mathrm{k}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta'},$$

qui sera appelée *la partie bien définie du potentiel* de l'élément k' de solénoïde au point (x, y, z).

55. En substituant (23) dans (11), on trouve

$$(50)\qquad \begin{cases} (M', \mathrm{I}\,ds)_x & \text{ou} \quad \xi\,\mathrm{I}\,ds = \mathrm{I}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}dz - \dfrac{\partial V}{\partial z}dy\right), \\ (M', \mathrm{I}\,ds)_y & \text{ou} \quad \eta\,\mathrm{I}\,ds = \mathrm{I}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}dx - \dfrac{\partial V}{\partial x}dz\right), \\ (M', \mathrm{I}\,ds)_z & \text{ou} \quad \zeta\,\mathrm{I}\,ds = \mathrm{I}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}dy - \dfrac{\partial V}{\partial y}dx\right). \end{cases}$$

Réductions des formules précédentes à leurs formes les plus simples.

56. On appelle *électromagnétique* le système d'unités absolues qu'il faut adopter pour réduire à l'unité le coefficient f de la formule (49).

La répulsion des pôles positifs de deux solénoïdes, étant (46) $\frac{f\mu\mu'}{r^2}$ ou (8) $\frac{f\mathrm{II}'\lambda\lambda'}{\partial\zeta\,\partial\zeta' r^2}$, devient $f\left(\frac{\mathrm{I}\lambda}{\partial\zeta\, r}\right)^2$ pour $\mathrm{I}=\mathrm{I}'$, $\lambda=\lambda'$ et $\partial\zeta=\partial\zeta'$. Cette répulsion F est alors proportionnelle à I^2; et il suffit de régler l'intensité I d'un courant passant dans deux solénoïdes identiques, pour rendre F égale à l'unité, lorsque $\lambda = r\,\partial\zeta$. Comme elle devient $f\mathrm{I}^2$, on a $f=1$ en prenant cette intensité pour unité.

57. *L'unité électromagnétique* d'intensité des courants électriques est celle d'un courant qui, passant dans deux solénoïdes identiques, produit une répulsion égale à l'unité de force entre leurs pôles positifs, séparés par la distance $\frac{\lambda}{\partial\zeta}$, quotient de l'aire d'un élément d'un solénoïde par la distance de deux éléments consécutifs.

58. Quand on adopte cette unité, (47) et (49) deviennent, en récrivant (25) et observant que la symétrie permet d'intervertir k et k',

$$(51)\qquad \mathrm{W}_{k',k} = \mathrm{W}_{k,k'} = \mathrm{kk'}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\zeta'} = \mathrm{kk'}\frac{\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'}{r^3},\ \mathrm{k}=\mathrm{I}\lambda,\ \mathrm{k}'=\mathrm{I}'\lambda',$$

$$(52)\qquad \varphi_{k'} = \mathrm{k}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} = \mathrm{k}'\frac{\cos\theta}{r^2},\quad \varphi_k = \mathrm{k}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} = \mathrm{k}\frac{\cos\theta'}{r^2}.$$

On obtient les derniers membres par les formules de transformation

$$(53)\qquad \frac{\partial r}{\partial\zeta} = -\cos\vartheta',\ \frac{\partial r}{\partial\zeta'} = -\cos\vartheta,\ \frac{\partial\cos\theta}{\partial\zeta} = \frac{\partial\cos\theta'}{\partial\zeta'} = \frac{\cos\varepsilon - \cos\theta\cos\theta'}{r}.$$

59. Soient encore α, β, γ les cosinus (6); on a (26)

$$(54)\qquad \mathrm{W}_{M,k} = \mathrm{k}\frac{\partial\mathrm{V}_M}{\partial\zeta} = -\mathrm{k}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma).$$

L'action de M' sur k est représentée par une force appliquée au centre de gravité de k, et ayant (29) pour composantes

$$(55)\quad (M',k)_x = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial x}, \quad (M',k)_y = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial y}, \quad (M',k)_z = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial z},$$

ou (54)

$$(55')\quad (M',k)_x = -k\frac{\partial \frac{\partial V_M}{\partial x}}{\partial \zeta}, \quad (M',k)_y = -k\frac{\partial \frac{\partial V_M}{\partial y}}{\partial \zeta}, \quad (M',k)_z = -k\frac{\partial \frac{\partial V_M}{\partial z}}{\partial \zeta},$$

ou (23)

$$(55'')\quad (M',k)_x = k\frac{\partial A_M}{\partial \zeta}, \quad (M',k)_y = k\frac{\partial B_M}{\partial \zeta}, \quad (M',k)_z = k\frac{\partial C_M}{\partial \zeta},$$

et, par un couple ayant (30) pour moments par rapport aux axes,

$$(56)\quad (M',k)_{yz} = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial (yz)}, \quad (M',k)_{zx} = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial (zx)}, \quad (M',k)_{xy} = -\frac{\partial W_{Mk}}{\partial (xy)},$$

$$(56')\quad \begin{cases} (M',k)_{yz} = k(\beta C_M - \gamma B_M), \\ (M',k)_{zx} = k(\gamma A_M - \alpha C_M), \\ (M',k)_{xy} = k(\alpha B_M - \beta A_M), \end{cases}$$

ou (23)

$$(56'')\quad \begin{cases} (M',k)_{yz} = k\left(\gamma\frac{\partial V_M}{\partial y} - \beta\frac{\partial V_M}{\partial z}\right), \\ (M',k)_{zx} = k\left(\alpha\frac{\partial V_M}{\partial z} - \gamma\frac{\partial V_M}{\partial x}\right), \\ (M',k)_{xy} = k\left(\beta\frac{\partial V_M}{\partial x} - \alpha\frac{\partial V_M}{\partial y}\right). \end{cases}$$

40. *Définition d'Ampère*. — La *force directrice* du système M est la force essentiellement positive D_M appliquée au point (x, y, z), et qui a pour composantes les fonctions (9) A_M, B_M, C_M. Elle a donc pour expression

$$(57)\quad D_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + C_M^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_M}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_M}{\partial z}\right)^2}.$$

41. *Définition de Faraday.* — Toute ligne N qui a pour tangente positive, en chaque point, la force directrice $D_{M'}$ du système M' est une *ligne de force* de ce système.

42. En prenant $D_{M'}$ pour la direction positive de l'axe des x, on a $D_{M'} = A_{M'}$, et la première équation (23) devient

$$D_M = -\frac{\partial V_M}{\partial N}, \tag{58}$$

relation qui subsiste quels que soient les axes, les trois quantités D, V, N étant indépendantes du choix qu'on en fait. Elle montre que dV et dN sont de signes contraires.

43. La force directrice est donc dirigée dans le sens où le potentiel décroît.

44. En désignant un elément k de solénoïde par la notation $I\lambda$ (25) de son moment, l'analogie des expressions (11) et (56'),

$$\tag{59} \left\{ \begin{aligned} (M', I\,ds)_x &= I\left(C\frac{\partial y}{\partial s} - B\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds, \quad \ldots, \\ (M', I\lambda)_{yz} &= I\left(C\frac{\partial y}{\partial \zeta} - B\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)\lambda, \quad \ldots \end{aligned} \right.$$

conduit à l'énoncé suivant.

45. Si l'élément $I\,ds$ de courant fictif coïncidait avec le premier élément $d\zeta$ de l'élément de solénoïde k ou $I\lambda$, ce qui donnerait $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \zeta}$, et si l'on représentait l'action de M' sur k par une force appliquée à λ et par un couple, l'axe du couple et la force exercée par M' sur $I\,ds$ coïncideraient en direction et sens, et le moment du couple serait à la force dans le rapport numérique de λ à ds.

Propriétés de l'énergie (26), dans le cas où M' et k satisfont au principe de l'action et de la réaction.

46. Soit

$$(60)\qquad \mathfrak{M}'$$

ce que devient le système M' (1), quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie, c'est-à-dire un système de courants fermés et d'aimants, rigide et invariable dans sa constitution physique. L'équation (54) devient

$$(61)\qquad W_{\mathfrak{M}',k} = k\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial \zeta}.$$

47. L'énergie $W_{\mathfrak{M}',k}$ représente la somme des travaux virtuels (n° **15**) des actions mutuelles des deux corps $\mathfrak{M}'$ et k, transportés de leurs positions actuelles à deux autres, pour lesquelles leur distance mutuelle est infinie; par suite,

$$(62)\qquad W_{\mathfrak{M}',k} = W_{k,\mathfrak{M}'}.$$

48. En effet, dans l'équation (32), $\varpi(\mathfrak{M}',k)$ désigne le travail virtuel de l'action de $\mathfrak{M}'$ sur k, rapporté à des axes mobiles et solidaires avec $\mathfrak{M}'$. C'est aussi la somme $\varpi(\mathfrak{M}',k) + \varpi(k,\mathfrak{M}')$ des travaux virtuels de l'action et de la réaction, rapportés à des axes fixes, et qui alors se feraient équilibre sur un système rigide. D'ailleurs, le second membre de (32) étant (27) indépendant du choix des axes, (31) et (32) deviennent, par rapport à des axes fixes,

$$(63)\qquad d\varpi(M',k) + d\varpi(k,M') = -\frac{dW}{dt}dt,$$

$$(64)\qquad \Delta\varpi(M',k) + \Delta\varpi(k,M') = W_1 - W_2.$$

49. Les dérivées partielles $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial x}$, $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial y}$, $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial z}$ du potentiel $V_{\mathfrak{M}'}$ du système $\mathfrak{M}'$ (60) sont infiniment petites à l'infini.

50. En effet, toute action physique observable jouissant de cette propriété, elle s'applique aux premiers membres des expressions, déduites de (56''),

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{k}(\mathfrak{M}', k_{\beta=1})_{xy} = \dfrac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial x}, \\ \dfrac{1}{k}(\mathfrak{M}', k_{\gamma=1})_{yz} = \dfrac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial y}, \\ \dfrac{1}{k}(\mathfrak{M}', k_{\alpha=1})_{zx} = \dfrac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial z}. \end{cases}$$

§ III. — Calcul et propriétés du potentiel d'un courant linéaire fermé.

Expression la plus générale du potentiel d'un courant linéaire fermé, au moyen d'une intégrale définie.

51. Soient $\mathfrak{S}'$ ce courant, I' son intensité constante, S' sa longueur, et $V_{\mathfrak{S}'}$ l'expression la plus générale de son potentiel au point (x, y, z), non situé sur S'.

52. Cette expression est définie toute fonction continue de x, y, z, qui a pour dérivées partielles (23)

$$(66)\qquad \frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} = -A_{\mathfrak{S}'}, \quad \frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} = -B_{\mathfrak{S}'}, \quad \frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} = -C_{\mathfrak{S}'}.$$

Cette définition équivaut à la formule

$$(67)\quad V_{\mathfrak{S}'}(x, y, z) = V_{\mathfrak{S}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_0^{L} \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1}\right) dl_1,$$

dans laquelle L désigne une ligne assujettie uniquement à aller, sans rencontrer S', du point arbitraire $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au point $M(x, y, z)$, et qui passe par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, quand il a parcouru sur L l'arc l_1. Voilà l'expression la plus générale de $V_{\mathfrak{S}'}$: le calcul en est ramené à celui de ses trois dérivées (66).

53. Soit k (25) le moment d'un élément fictif k de solénoïde, dont l'axe ξ commencerait au point M, et aurait pour cosinus directeurs α,

β, γ. Son potentiel ayant (52) pour partie bien définie, au point (x', y', z') de S′, où commence l'élément $I'ds'$,

$$(68) \qquad \varphi_k = \mathrm{k}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

il produirait sur cet élément une force appliquée en ce point, et dont la projection sur l'axe des x, obtenue en substituant (68) dans (50), est

$$(69) \qquad \left\{ \begin{aligned} (k, I'ds')_x &= I'\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}dz' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}dy'\right) \\ &= I'\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds'. \end{aligned} \right.$$

Posant

$$(70) \quad F_{\varpi'} = I'\int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}ds', \quad G_{\varpi'} = I'\int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'}ds', \quad H_{\varpi'} = I'\int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}ds',$$

supprimant l'indice ϖ' quand il n'y aura pas d'ambiguïté, et intégrant (69) pour tous les éléments du contour S′, on trouve

$$(k, \varpi')_x = \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

Mais (55′)

$$(\varpi', k)_x = -\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Le principe de l'action et de la réaction ayant lieu entre les courants fermés ϖ' et k, la somme des premiers membres des deux dernières équations est identiquement nulle; ce qui donne la première des trois équations suivantes :

$$(71) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or les fonctions (70) sont les potentiels qu'aurait, au point (x, y, z), la matière du rhéophore, si elle avait respectivement pour densité linéaire, au point (x', y', z'), $I\frac{\partial x'}{\partial s'}$, $I\frac{\partial y'}{\partial s'}$ et $I\frac{\partial z'}{\partial s'}$. On sait que les dérivées partielles du premier ordre de ces trois potentiels sont infiniment petites à l'infini. Celles de $V_{\mathfrak{S}'}$ jouissent de la même propriété (n° **49**). D'ailleurs, le déplacement $d\xi$ étant arbitraire dans les équations (71), les parenthèses de ces équations ont des valeurs à la fois constantes en tous les points de l'espace non situés sur S' et infiniment petites à l'infini, par suite identiquement nulles : ce qui donne les trois équations

$$(72) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}$$

ou (66)

$$(73) \qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Expression de la partie bien définie du potentiel d'un courant linéaire fermé.

54. La partie bien définie $\mathcal{V}_{\mathfrak{S}'}$ du potentiel d'un système $\mathfrak{S}'$ de courants linéaires fermés, pouvant se réduire à un seul $\mathfrak{S}'_{n'}$, d'intensité constante $I'_{n'}$ et de longueur $S'_{n'}$, est définie la somme algébrique des parties bien définies (49) des potentiels des éléments de solénoïdes dans lesquels le système est décomposable par la construction suivante, due à Ampère.

55. On appelle *décomposition d'un courant linéaire fermé en éléments de solénoïdes* la substitution à ce courant $\mathfrak{S}$, d'intensité I et de longueur S, d'un système d'éléments de solénoïdes, obtenus en décomposant une aire A, dont le contour S est seul déterminé, en éléments dA, autour desquels on fait tourner, dans le même sens que le proposé, autant de courants fictifs, de même intensité que lui, I. La *face positive* de A est celle qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par ce courant, verrait à sa gauche : elle est donc formée par l'ensemble des faces positives des éléments de solénoïdes, déjà définies (n° **17**).

56. Cette décomposition ne change aucune action observable entre le courant $\mathfrak{S}$ et un corps extérieur.

Elle ne change, en effet, aucune des actions produites sur $\mathfrak{S}$ par le système M' (1), car elle adjoint à $\mathfrak{S}$ un système d'éléments de courants linéaires, deux à deux égaux, superposés et de sens contraires, sur lesquels les actions de M' se détruisent (n° **21**). Dès lors, en vertu du principe de l'action et de la réaction, la décomposition (n° **55**) ne change pas non plus l'action de $\mathfrak{S}'$ sur le système $\mathfrak{M}'$ (60), particulièrement sur un élément de solénoïde, ni, par suite, sur un élément de courant extérieur (n° **45**) coïncidant avec le premier élément de l'axe d'un élément fictif de solénoïde.

57. En décomposant le courant fermé linéaire $\mathfrak{S}'$, d'intensité I′ et de longueur S′, en éléments k' de solénoïdes, dans l'aire A′ terminée à S′, on a (52), pour la partie bien définie du potentiel d'un de ces courants,

$$(74)\qquad \varphi_{k'} = \mathrm{I}'\, d\mathrm{A}' \frac{\cos(\zeta', r)}{r^2},$$

d'où (n° **54**)

$$(75)\qquad \varphi_{\mathfrak{S}'} = \mathrm{I}' \iint_{\mathrm{A}'} d\mathrm{A}' \frac{\cos(\zeta', r)}{r^2}.$$

58. Cette fonction (75) est infiniment petite à l'infini ; car on a, en valeur absolue,

$$\varphi_{\mathfrak{S}'} < \mathrm{I}' \iint_{\mathrm{A}'} \frac{d\mathrm{A}'}{r^2} < \frac{\mathrm{I}'\mathrm{A}'}{(\text{minimum de } r)^2},$$

inégalité dont le troisième membre jouit évidemment de la propriété énoncée.

59. La fonction $\varphi_{\mathfrak{S}'}$ (n° **54**) est continue en tout point de l'espace extérieur à A′, et présente, lorsque le point M (x, y, z) traverse cette aire, la discontinuité $4\pi\mathrm{I}'$, affectée du signe où il se trouve après le passage.

En effet, dans le cas où l'aire A′ est plane, l'expression $\varphi_{\mathfrak{S}'}$, divisée par I′, représente l'angle solide sous lequel on la voit du point M, affecté du signe (n° **55**) de la région où se trouve ce point, et prend la

valeur ambiguë $\pm 2\pi$, si M est dans l'aire A'. Donc elle présente, quand le point M franchit A', la discontinuité 4π, différence de ces deux valeurs, affectée du signe de la face visible du point M après le passage.

Dans le cas général où S' et A' sont quelconques, tous les éléments de la somme (75) sont des fonctions continues de x, y, z, sans exception, lorsque le point M ne franchit pas A', et cette somme jouit de la même propriété. Lorsque M franchit A', un seul élément est excepté, celui dont il traverse l'aire dA', et qui, traité comme plan, présente la discontinuité $4\pi I'$. Donc la discontinuité de la fonction φ, somme des discontinuités de ses éléments, est aussi $4\pi I'$ et a le signe de la région où pénètre le point M. L'énoncé du n° 59 est ainsi démontré.

Expression la plus générale du potentiel d'un courant linéaire fermé, au moyen de sa partie bien définie.

60. La fonction $V_{\mathfrak{S}'}$ (67) est continue en tout point de l'espace non situé sur S', et la fonction $\varphi_{\mathfrak{S}'}$ (n° 54) en tout point de l'espace non situé sur A'. Mais, si la ligne L est remplacée par une ligne l, assujettie à la nouvelle condition de ne pas franchir A', les deux fonctions ne diffèrent plus que par une constante, car elles sont finies, continues, et ont les mêmes dérivées (66) en tout point mobile dans l'espace et ne traversant pas A'. Après avoir substitué l à L dans la fonction $V_{\mathfrak{S}'}$, on peut donc, par le choix de la constante arbitraire $\varphi_{\mathfrak{S}'}(x_0, y_0, z_0)$, l'identifier avec $\varphi_{\mathfrak{S}'}$, et l'écrire

$$\varphi_{\mathfrak{S}'}(x, y, z) = \varphi_{\mathfrak{S}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_0^l \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1.$$

Le premier membre étant nul (n° 58), si le point (x, y, z) est à l'infini, on a, en prolongeant l jusqu'à l'infini, dans le sens des arcs négatifs, et changeant les signes,

$$o = -\varphi_{\mathfrak{S}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_{\infty}^0 \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$(76) \qquad \varphi_{\mathfrak{S}'}(x, y, z) = -\int_{\infty}^l \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

ou, en substituant successivement (73) et (70),

$$(76')\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{S}'} = \int_{\infty}^{l} \Bigg[& \left(\frac{\partial G_1}{\partial z_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial l_1} \\ & + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right)\frac{\partial y_1}{\partial l_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\Bigg] dl_1, \end{aligned}\right.$$

$$(76'')\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{S}'} = I'\int_{\infty}^{l} dl_1 \int_0^{S'} \Bigg[& \left(\frac{\partial y_1}{\partial l_1}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial z_1}{\partial l_1}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \\ & + \left(\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial x_1}{\partial l_1}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \\ & + \left(\frac{\partial x_1}{\partial l_1}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial y_1}{\partial l_1}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\Bigg] ds' \end{aligned}\right.$$

ou

$$(76''')\quad \varphi_{\mathfrak{S}'} = I'\int_{\infty}^{l} dl_1 \int_0^{S'} \left[\frac{\begin{aligned}&(x'-x_1)(\partial y_1\,\partial z' - \partial z_1\,\partial y') + (y'-y_1)(\partial z_1\,\partial x' - \partial x_1\,\partial z') \\ &\quad + (z'-z_1)(\partial x_1\,\partial y' - \partial y_1\,\partial x')\end{aligned}}{r^3\,\partial l_1\,\partial s'}\right] ds'.$$

On déduit de (70) et (73), ou de (76) et (76‴),

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} A_{\mathfrak{S}'} &= I'\int_0^{S'}\left(\frac{y'-y}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'-z}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right) ds', \\ B_{\mathfrak{S}'} &= I'\int_0^{S'}\left(\frac{z'-z}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x'-x}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right) ds', \\ C_{\mathfrak{S}'} &= I'\int_0^{S'}\left(\frac{x'-x}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'-y}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) ds'. \end{aligned}\right.$$

61. Soient ΔV et $\Delta\varphi$ les variations des fonctions (67) et (75) des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point mobile M_1, lorsqu'il revient à sa position initiale M_0 (x_0, y_0, z_0), après avoir parcouru une ligne fermée L, qui ne rencontre pas S', mais qui peut traverser $p+n$ fois l'aire A', entrer dans la région positive en p points et dans la région négative en n points. La fonction φ est continue en tous les points de L, excepté aux points d'intersection, où elle présente (n° 59) autant de disconti-

nuités $\pm 4\pi I'$. D'ailleurs, n'ayant (75) qu'une valeur en chaque point, elle reprend celle qu'elle avait en M_0

$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{\partial\varphi_1}{\partial l_1} dl_1 + 4(p - n)\pi I' = 0;$$

tandis que la fonction V n'a (67), sur L, aucune discontinuité,

$$\Delta V = \int_0^L \frac{\partial V_1}{\partial l_1} dl_1.$$

Mais, les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi_1}{\partial l_1}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial l_1}$ étant égales en tous les points de L, les intégrales qui figurent dans ces deux expressions le sont aussi. Donc

(78) $$\Delta V = 4(n - p)\pi I'.$$

62. En prenant le point (x_0, y_0, z_0) à l'infini, et transportant, sur la ligne L, l'origine des arcs en un autre point, situé à distance finie, l'équation (67) prend la forme

(79) $$V = V_0 - \int_{-\infty}^{L} \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1.$$

La ligne L, assujettie uniquement à ne pas rencontrer S', peut traverser A' en $p + n$ points, entrer dans la région positive en p points, et dans la région négative en n points. La valeur de l'intégrale (79) est la même que si la ligne L, après le dernier passage, au lieu d'aller d'un seul trait au point $M(x, y, z)$, allait, sans franchir A', à son point de départ M_0, situé à l'infini, et de là au point M par une ligne l (n° **60**). Donc, en continuant de désigner par ΔV la partie de l'intégrale (79) dont la ligne L a ses extrémités réunies en M_0, on a

$$V = V_0 + \Delta V - \int_{-\infty}^{l} \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1 = V_0 + \Delta V + \varphi$$

ou, en substituant (78),

(80) $$V_{\mathfrak{S}'} = V_0 + 4(n - p)\pi I' + \varphi_{\mathfrak{S}'}.$$

Voilà la forme la plus générale du potentiel d'un courant fermé linéaire $\mathfrak{S}'$, en un point extérieur M(x, y, z). Elle exprime que ce potentiel est une fonction périodique des coordonnées x, y, z, dont la période est $4\pi I'$.

Potentiel d'un système $\mathfrak{S}'$ de courants fermés linéaires.

63. En vertu de la définition du n° **54**, la partie bien définie du potentiel d'un système rigide $\mathfrak{S}'$ de courants fermés linéaires $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2, \ldots$, d'intensités constantes $I'_1, I'_2, \ldots$, et de longueurs $S'_1, S'_2, \ldots$, en un point M(x, y, z) non situé sur une des lignes $S'_1, S'_2, \ldots$, est la somme des parties bien définies des potentiels de ces courants :

$$\varphi_{\mathfrak{S}'} = \sum_{n'} \varphi_{\mathfrak{S}_{n'}}. \tag{81}$$

64. Ce potentiel $\varphi_{\mathfrak{S}'}$ est, comme toutes ses parties (n° **58**), infiniment petit à l'infini.

65. Les formules (66), (72), (73) et (76') s'appliquent au système $\mathfrak{S}'$, en remplaçant les fonctions (70) par

$$\left\{\begin{aligned} F_{\mathfrak{S}'} &= \sum_{n} I_{n'} \int_0^{S_{n'}} \frac{1}{r'_{n'}} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)_{n'} ds_{n'}, \\ G_{\mathfrak{S}'} &= \sum_{n} I_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r'_{n'}} \left(\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)_{n'} ds'_{n}, \\ H_{\mathfrak{S}'} &= \sum_{n} I_{n} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r'_{n}} \left(\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)_{n'} ds_{n'}. \end{aligned}\right. \tag{82}$$

La formule (80) se généralise au moyen du lemme suivant.

66. Le potentiel V de tout système rigide M', pouvant comprendre des courants fermés permanents, des aimants dont le magnétisme est rigide, et le magnétisme terrestre, en un point M(x, y, z) extérieur au système, est la somme des potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_{m'}$ des différents corps du système, et d'une constante arbitraire V_0 :

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_{m'} = V_0 + \Sigma V_{n'} \tag{83}$$

67. En effet, les composantes $\xi \mathrm{I}\, ds, \ldots$ de l'action de M' sur un élément de courant extérieur $\mathrm{I}\, ds$, commençant au point M, sont les sommes des projections $\xi_{n'} \mathrm{I}\, ds, \ldots$ des actions des différents corps dont M' se compose

$$\xi = \Sigma \xi_{n'}, \quad \eta = \Sigma \eta_{n'}, \quad \zeta = \Sigma \zeta_{n'}. \tag{84}$$

Or les formules (50) donnent

$$\xi_{n'}\, ds = \frac{\partial \mathrm{V}_{n'}}{\partial y} dz - \frac{\partial \mathrm{V}_{n'}}{\partial z} dy, \quad \ldots;$$

d'où

$$(\Sigma \xi_{n'}) ds = \frac{\partial \Sigma \mathrm{V}_{n'}}{\partial y} dz - \frac{\partial \Sigma \mathrm{V}_{n'}}{\partial z} dy, \quad \ldots;$$

mais elles donnent aussi

$$\xi\, ds = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} dz - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} dy, \quad \ldots$$

Or les premiers membres de ces deux derniers groupes d'équations étant (84) identiques, et les seconds linéaires par rapport aux trois variables indépendantes dx, dy et dz, il en résulte les trois identités

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma \mathrm{V}_{n'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma \mathrm{V}_{n'}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = \frac{\partial \Sigma \mathrm{V}_{n'}}{\partial z}. \tag{85}$$

Donc les deux fonctions V et $\Sigma \mathrm{V}_{n'}$, continues en tous les points de l'espace extérieur à M', et ayant en tous ces points les mêmes dérivées (85), ne peuvent différer que par une constante V_0, ce qui démontre (83).

68. L'équation (80) donne, pour les différents corps du système $\mathfrak{S}'$,

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1 &= \mathrm{V}_{01} + 4(n_1 - p_1)\pi \mathrm{I}'_1 + \mathfrak{V}_1, \\ \mathrm{V}_2 &= \mathrm{V}_{02} + 4(n_2 - p_2)\pi \mathrm{I}'_2 + \mathfrak{V}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ajoutant ces équations membre à membre et appliquant (83), on ob-

tient l'expression la plus générale du potentiel d'un système $\mathfrak{S}'$ de m' courants linéaires $\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}'_2$, ..., fermés et permanents.

$$(86) \qquad V_{\mathfrak{S}'} = V_0 + 4\pi \sum_h (n_{h'} - p_{h'}) I_h + \varphi_{\mathfrak{S}}$$

Cette fonction (86) admet donc les m' périodes

$$4\pi I'_1, \quad 4\pi I'_2, \quad \ldots, \quad 4\pi I_{m'}.$$

Propriété géométrique des surfaces de niveau d'un courant linéaire fermé.

69. Chaque *surface de niveau*

$$(87) \qquad V = \text{une constante } V_b$$

d'un courant linéaire fermé $\mathfrak{S}'$, d'intensité I' et de longueur S', passe par tous les points de S', se termine à cette ligne, et fait avec une autre $V = V_a$ l'angle constant

$$(88) \qquad \psi_b - \psi_a = \frac{V_a - V_b}{2I}.$$

70. En effet, si, dans le plan normal en un point O' de S', on décrit une circonférence l, de centre O' et de rayon R' infiniment petit, le potentiel V du courant, en un point M qui décrit cette circonférence, augmente ou diminue, suivant le sens du mouvement, de $4\pi I'$ à chaque révolution (80); et si la rotation se continue indéfiniment, V varie d'une manière continue, jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$. Donc toute surface de niveau $V = V_b$ passe par un point de cette circonférence; étant fixe et passant infiniment près du point O', elle passe rigoureusement par ce point; ce qui démontre une partie de l'énoncé du nº 69.

71. La surface $\varphi = 0$, la seule qui ait des points à l'infini (nº 58), a donc aussi un point M_0 sur la circonférence $2\pi R$ (*fig.* 4). La portion de l'intégrale (76) dont la ligne d'intégration va de l'infini au point M_0 est donc infiniment petite; et si ce point est pris pour origine de l'arc l,

l'équation (76) devient

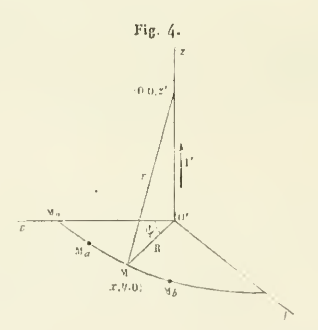
$$(89)\qquad \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}(x, y, z) = -\int_{0}^{l}\left(A_1\frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1\frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\right)dl_1.$$

On peut donc prendre $l = 0$, au lieu de $l = -\infty$, pour limite inférieure des intégrales (76), (76′), (76″) et (76‴). Cette dernière devient

$$(90)\qquad \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}} = \mathrm{I}'\int_{0}^{l} dl_1 \int_{0}^{s} \left[\frac{(x'-x_1)(\partial y_1\,\partial z' - \partial z_1\,\partial y') + (y'-y_1)(\partial z_1\,\partial x' - \partial x_1\,\partial z') + (z'-z_1)(\partial x_1\,\partial y' - \partial y_1\,\partial x')}{r^3\,\partial l_1\,\partial s'}\right] ds'.$$

72. Prenant le point O′ pour origine, la tangente positive à S′ en ce point pour axe des z, OM_0 pour axe des x, et pour ligne d'intégration l l'axe M_0M de la circonférence $2\pi R$, on ne change pas l'intégrale (90) en multipliant x_1, y_1, z_1, x', y', z' par une même constante a, car elle est du degré zéro par rapport à l'unité de longueur. Les surfaces de

Fig. 4.



niveau restent semblables à elles-mêmes, et l'angle (88) conserve sa valeur. On peut donc le calculer en donnant à a une valeur infinie et telle que R devienne fini : alors, à toute la partie de S′ qui est rejetée à l'infini, correspond dans (90) une intégrale infiniment petite : car elle l'était évidemment avant la multiplication par a, qui n'en a pas changé la valeur, puisque cette partie de S′ était à une distance finie de l'arc l, et que cet arc était infiniment petit. Donc la fonction (90) varie infiniment peu, quand on remplace, après la multiplication par a, l'arc S′

par sa partie située à distance finie, dont la courbure totale est infiniment petite, puis cette partie par sa tangente en O'.

73. La fonction (90) diffère donc infiniment peu du potentiel en M (*fig.* 4) d'un courant rectiligne indéfini, d'intensité I', coïncidant avec l'axe des z. Il faut faire, dans l'équation (90), $z_1 = 0$, $dz_1 = 0$, $x' = y' = 0$, $dx' = dy' = 0$, et elle devient

$$\varphi = \mathrm{I}' \int_0^l dl_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y_1}{r^3} \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - \frac{x_1}{r^3} \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dz'$$
$$= \mathrm{I}' \int_0^l \left(y_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - x_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dl_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{r^3},$$

ou

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \mathrm{I}' \int_0^l \left(y_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - x_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dl_1 \left[\frac{z'}{r\mathrm{R}^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = -2\mathrm{I}' \int_0^l \frac{y_1\, dx_1 - x_1\, dy_1}{\mathrm{R}^2\, dl_1}\, dl_1 \\ &= -2\mathrm{I}' \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = -2\mathrm{I}'.\mathrm{MO'M}_0 = -2\mathrm{I}'\psi. \end{aligned} \right.$$

On a donc, en deux points M_a et M_b de la circonférence, les valeurs $\varphi_a = -2\mathrm{I}'\psi_a$ et $\varphi_b = -2\mathrm{I}'\psi_b$, dont la différence est $\mathrm{V}_a - \mathrm{V}_b = 2\mathrm{I}'(\psi_b - \psi_a)$: ce qui démontre (88).

§ IV. — Énergie de l'action d'un système quelconque *M'*, susceptible de produire des forces observables, sur un courant linéaire, extérieur et fermé, Σ, dont la ligne S est flexible et extensible, mais dont l'intensité I reste constante.

Flux de force envoyé dans l'espace par le système M' (notation 1).

74. Le système *M'* est supposé rigide, permanent et solidaire avec trois axes à gauche rectangulaires. L'action cherchée est exprimable par une énergie $\mathrm{W}_{M',\Sigma}$: celle-ci peut être représentée géométriquement, dans tous les cas, par un flux de force, traversant une aire de périmètre S; et analytiquement, dans le cas où *M'* se réduit à un système de courants linéaires fermés, par une intégrale double.

75. La représentation géométrique repose sur une propriété de la

force directrice D (n° 40) du système M' : c'est la permanence du mouvement d'un fluide fictif, mouvement défini par la double condition qu'il ait en chaque point la direction D, et que D soit l'expression du *flux* dans cette direction, c'est-à-dire $D\,d\omega$ la masse fluide qui traverse, dans l'unité de temps, l'élément $d\omega$ de surface de niveau.

76. Le flux D_{ρ}, suivant la normale positive ρ à l'élément dA d'une surface quelconque, est défini le coefficient du flux $D_{\rho}\,dA$ traversant dA, c'est-à-dire la masse fluide qui franchit dA dans l'unité de temps, affectée du signe de la région où elle s'introduit. Il en résulte que le flux est représenté avec son signe par la projection de D sur ρ

$$D_{\rho} = D\cos(D, \rho) \tag{92}$$

ou

$$D_{\rho} = A\alpha + B\beta + C\gamma, \tag{93}$$

$$A,\ B,\ C \quad \text{et} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \tag{94}$$

designant les composantes de D et les cosinus directeurs de ρ ; et que les flux, dans les directions positives des axes, sont les composantes de D dans ces mêmes directions

$$D_x = A, \quad D_y = B, \quad D_z = C. \tag{95}$$

77. Le fluide fictif étant conçu comme représentant, par son mouvement, le champ de force du système M', soit ρ la densité de ce fluide, à l'instant t, au point M, dont les coordonnées x, y, z sont fixes. C'est une fonction des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Le mouvement satisfait à l'équation générale de continuité $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ou (95)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \tag{96}$$

mais (20)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{97}$$

et l'équation de continuité se réduit à

$$(98) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette propriété (98), adjointe à la fixité, par rapport aux axes, des lignes de flux, qui coïncident avec les lignes de force de M', établit la permanence (n° 75) du mouvement du fluide fictif.

78. On appelle *flux de force* émanant du système M' le flux défini par le mouvement permanent de ce fluide fictif; et *flux de force traversant une aire* A, dont ζ désigne la normale positive, l'intégrale

$$(99) \qquad \varepsilon_{M',A} = \iint_A D_\zeta \, dA,$$

des flux de force $D_\zeta \, dA$ qui en traversent tous les éléments dA. Faraday l'a considéré le premier sous le nom de *nombre de lignes de force traversant* A; puis Maxwell l'a appelé *induction magnétique traversant* A. La dénomination de *flux de force* a été adoptée par MM. Mascart et Joubert.

79. La propriété unique qui sera invoquée est représentée par l'équation

$$(100) \qquad \varepsilon_{M',S} = \varepsilon_{M',A}.$$

Elle exprime que le flux de force, traversant une aire A, ne dépend que de son périmètre S. Elle se démontre en considérant une autre aire A_1, terminée au même contour S. La masse du fluide fictif, contenue dans un élément du volume compris entre A_1 et A_2, étant constante avec sa densité ρ (98), la masse contenue dans tout ce volume l'est aussi : donc la masse entrant dans ce volume, pendant l'unité de temps, par A, est égale à celle qui en sort par A_1, ce qui donne l'identité $\varepsilon_{M',A} - \varepsilon_{M',A_1} = 0$, équivalente à l'équation (100).

80. On a donc, pour le flux de force envoyé par M' sur la face

négative d'une aire A, de périmètre S, les notations et les expressions diverses, déduites de (92), (93), (99) et (100),

$$(101)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{M',S} = \varepsilon_{M',A} &= \iint_A D_\xi \, dA = \iint_A D \cos(D, \xi)\, dA \\ &= \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dA. \end{aligned} \right.$$

81. *Représentation, par un flux de force, de l'énergie des actions du système M' sur un courant linéaire extérieur, fermé et permanent.*

82. L'énergie $W_{M',\mathfrak{S}}$ des actions du système M' sur le courant permanent, linéaire et extérieur $\mathfrak{S}$, est définie le travail virtuel (n° **13**), par rapport à trois axes rectangulaires, fixés à M', des actions de ce système, toujours rigide et permanent, sur la ligne S, lorsque celle-ci, restant fermée, se déplace, en changeant ou non de longueur, mais I ne variant pas, jusqu'à ce qu'elle se réduise à un point, ou à deux lignes superposées et de sens contraires, ou à un système de plusieurs de ces figures, et engendre une aire A.

83. Si le magnétisme terrestre ne fait pas partie du système agissant $\mathfrak{M}'$, le travail virtuel relatif des actions de $\mathfrak{M}'$ sur $\mathfrak{S}$, par rapport à des axes fixés à $\mathfrak{M}'$, est égal à la somme des travaux virtuels absolus, rapportés à des axes fixes, de l'action et de la réaction, et l'*énergie des actions mutuelles* est représentée indifféremment par les deux notations $W_{\mathfrak{M}',\mathfrak{S}}$ et $W_{\mathfrak{S},\mathfrak{M}'}$.

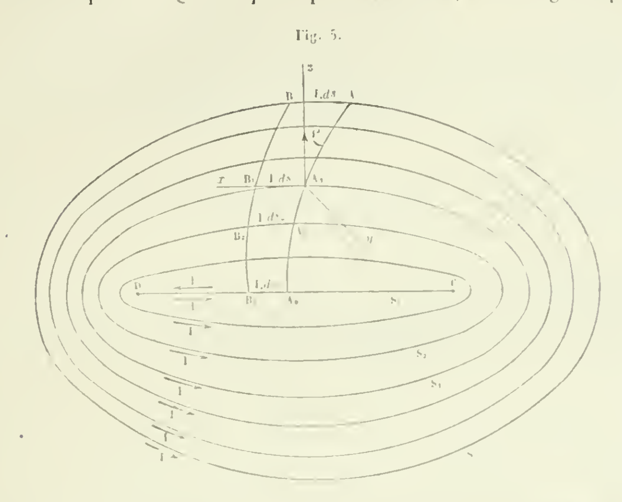
Il s'agit d'établir, entre l'énergie $W_{M',\mathfrak{S}}$ (n° **82**) et le flux de force $\varepsilon_{M',S}$ (101), la relation

$$(102)\qquad W_{M',\mathfrak{S}} = -I\varepsilon_{M',S}.$$

84. L'aire A contient la figure initiale S (*fig.* 5), deux figures consécutives quelconques S_1, S_2, et la figure finale S_0 de la ligne du courant, cette dernière pouvant se réduire à un point ou à deux arcs superposés, comme CD et DC. Sur ces quatre lignes se trouvent les quatre positions successives, généralement inégales, $AB = ds$, $A_1B_1 = ds_1$,

$A_2B_2 = ds_2$, $A_0B_0 = ds_0$, d'un même élément, de même intensité I. En prenant A_1 pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche, la normale positive g en ce point pour axe des z, et la tangente posi-

Fig. 5.



tive de S_1 pour axe des x, on aura pour axe des y une tangente intérieure à l'aire comprise dans S_1, en vertu de la convention du n° 55. En désignant par δx, δy et $\delta z = 0$ les composantes du déplacement A_1A_2, le travail virtuel élémentaire de l'action fictive (n° 13) de M' sur l'élément de courant $I.A_1B_1$, transporté en A_2B_2, est

$$(103)\qquad d\varpi(M', I\,ds_1) = (M', I\,ds_1)_x\,\delta x + (M', I\,ds_1)_y\,\delta y.$$

Mais (n° 24) $(M', I\,ds_1)_x = 0$, et le terme $(M', I\,ds_1)_y\,\delta y$ devient (11) $-\,\mathrm{IC}\,ds_1\,\delta y$ ou $-\,\mathrm{I}D_g\,ds_1\,\delta y$ ou $-\,\mathrm{I}D_g\,dA$ ou (101) $-\,\mathrm{I}\varepsilon_{g,dA}$; (103) donne ainsi

$$(104)\qquad d\varpi(M', I\,ds_1) = -\,\mathrm{I}D_g\,dA = -\,\mathrm{I}\varepsilon_{g,dA}.$$

En intégrant (104) pour tous les éléments de S_1, puis pour toutes

les figures successives S_1 de la ligne du courant, on trouve (102) en vertu de la définition du n° 82.

85. Si la ligne fermée S devient S_1, sans que l'intensité I varie, le travail $\Delta\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C})$ de l'action de M' sur le courant $\mathfrak{C}$, évalué par rapport aux axes fixés à M', sera égal à la variation de la fonction $-W_{M',\mathfrak{C}}$; ce qui s'exprime, selon que le déplacement est infiniment petit ou fini, par l'une des équations

$$(105)\qquad d\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C}) = -dW_{M',\mathfrak{C}}$$

ou

$$(106)\qquad \Delta\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C}) = W_{M',\mathfrak{C}} - W_{M',\mathfrak{C}_1},$$

$$(107)\qquad d\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C}) = I\, d\varepsilon_{M',S}$$

ou

$$(108)\qquad \Delta\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C}) = I\,\Delta\varepsilon_{M',S} = I(\varepsilon_{M',S_1} - \varepsilon_{M',S}).$$

86. En effet, si, par suite de deux déplacements, S devient successivement S_1, S_0, et son aire A_1, $A_0 = 0$, le travail virtuel (n° 13) des actions de M sur le courant $\mathfrak{C}$, d'intensité constante I, sera $\Delta\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C})$ dans la première phase, et $W_{M',\mathfrak{C}_1}$ dans la seconde : il aura donc pour expression totale

$$W_{M',\mathfrak{C}} = \Delta\mathfrak{T}(M', \mathfrak{C}) + W_{M',\mathfrak{C}_1},$$

ce qui démontre (106); les trois autres équations en résultent.

87. Dans le cas du n° 83, où le magnétisme terrestre ne fait pas partie du système agissant $\mathfrak{M}'$, les équations (105), (106), (107), (108), démontrées pour les travaux relatifs à des axes solidaires avec $\mathfrak{M}'$, deviennent, quand on rapporte les mêmes travaux virtuels à des axes

fixes,

$$(105') \quad d\mathcal{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + d\mathcal{E}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = -dW_{\mathfrak{M}', \mathfrak{S}},$$

$$(106') \quad \Delta\mathcal{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + \Delta\mathcal{E}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{S}} - W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{S}_1},$$

$$(107') \quad d\mathcal{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + d\mathcal{E}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = \mathrm{I}\, d\varepsilon_{\mathfrak{M}', \mathrm{S}},$$

$$(108') \quad \Delta\mathcal{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + \Delta\mathcal{E}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = \mathrm{I}\,\Delta\varepsilon_{\mathfrak{M}', \mathrm{S}} = \mathrm{I}(\varepsilon_{\mathfrak{M}', \mathrm{S}_1} - \varepsilon_{\mathfrak{M}', \mathrm{S}}).$$

88. *Représentation, par une intégrale double, de l'énergie de l'action mutuelle de deux courants linéaires, fermés et permanents.*

89. Quand le système agissant $\mathfrak{M}'$ se réduit à un second courant linéaire $\mathfrak{S}'$, d'intensité constante I', parcourant la ligne fermée et rigide S', l'énergie (102), qui devient, en substituant (101),

$$(109) \qquad W_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = -\mathrm{I}\int\int_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)\, d\mathrm{A},$$

peut être mise sous l'une des formes

$$(109') \qquad W_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = -\mathrm{II}'\int_0^{\mathrm{S}} ds \int_0^{\mathrm{S}'} ds' \frac{\cos(ds, ds')}{r} = W_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'},$$

en posant

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

$$(109'') \qquad W_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = -\mathrm{II}'\int_0^{\mathrm{S}} ds \int_0^{\mathrm{S}'} \frac{ds'}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right),$$

$$(109''') \qquad W_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = -\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}} \left(\mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}\frac{\partial y}{\partial s} + \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}\frac{\partial z}{\partial s}\right) ds;$$

dans la dernière figurent les trois potentiels (70) des composantes du

courant

$$(110)\quad F_{\mathcal{S}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds', \quad G_{\mathcal{S}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} ds', \quad H_{\mathcal{S}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} ds'.$$

90. En effet on a (73)

$$(111)\quad A_{\mathcal{S}'} = \frac{\partial H_{\mathcal{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial G_{\mathcal{S}'}}{\partial z}, \quad B_{\mathcal{S}'} = \frac{\partial F_{\mathcal{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial H_{\mathcal{S}'}}{\partial x}, \quad C_{\mathcal{S}'} = \frac{\partial G_{\mathcal{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\mathcal{S}'}}{\partial y},$$

et, en substituant ces fonctions dans (109),

$$(112)\quad \left\{ \begin{aligned} W_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\, I \iint_{A} \Big[\Big(\frac{\partial H_{\mathcal{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial G_{\mathcal{S}'}}{\partial z} \Big) \alpha \\ + \Big(\frac{\partial F_{\mathcal{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial H_{\mathcal{S}'}}{\partial x} \Big) \beta + \Big(\frac{\partial G_{\mathcal{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\mathcal{S}'}}{\partial y} \Big) \gamma \Big] dA. \end{aligned} \right.$$

Or, S étant le périmètre de A, les seconds membres de (109‴) et (112) sont identiques (7), quelles que soient les trois fonctions continues F, G, H de x, y, z. L'équation (109‴) est donc démontrée : elle devient (109″) en y substituant (110); et l'équation (109′) est la même que (109″).

Les définitions des nos **82** et **85**, appliquées à l'énergie $W_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$, supposent la ligne S′ rigide. En écartant cette restriction, on obtient l'énoncé suivant :

91. L'énergie $W_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ des actions que deux courants linéaires $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, d'intensités I, I′ constantes, exercent l'un sur l'autre, est la somme des travaux virtuels (n° **15**) de ces actions mutuelles, lorsque, I et I′ restant fixes, les lignes S et S′ de ces courants, toujours fermées, se déplacent, en changeant ou non de longueurs et de figures, jusqu'à ce que l'une des aires A, A′, dont elles sont les périmètres, s'évanouisse.

92. Pour le démontrer (n° **91**), soit

$$(113)\qquad d\varpi = d\varpi(\mathcal{S}', \mathcal{S}) + d\varpi(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$$

la somme des travaux élémentaires virtuels des actions mutuelles, dans le temps dt, après lequel $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont devenus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'_1$. Cette somme est la même que si les deux déplacements étaient successifs; et comme on aurait alors (106)

$$d\tilde{\varepsilon}(\mathcal{C}', \mathcal{C}) = W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} - W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}_1}$$

et

$$d\tilde{\varepsilon}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}') = W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}_1} - W_{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_1},$$

on a en réalité

$$d\tilde{\varepsilon} = W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} - W_{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_1} = -dW_{\mathcal{C}', \mathcal{C}},$$

et, en intégrant de t à t_2,

$$(114) \qquad \Delta\tilde{\varepsilon} = W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} - W_{\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_2} = -\Delta W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}},$$

$\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}'_2$ étant ce que deviennent $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ à l'instant t_2. Et si, à cet instant, l'aire A est nulle, le flux de force (99) qui la traverse l'est aussi, et (102) donne $W_{\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_2} = 0$. La forme symétrique (109) de cette fonction montre qu'elle s'annule aussi avec A_2. Alors (114) se réduit à l'équation, qui démontre l'énoncé du n° **91**,

$$(115) \qquad \tilde{\varepsilon} = W_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}.$$

93. L'énergie $W_{\mathfrak{M}', \mathcal{C}}$ (n° **85**) exprime le travail virtuel (n° **15**), par rapport à des axes fixés à $\mathfrak{M}'$, de l'action de $\mathfrak{M}'$ sur $\mathcal{C}$; elle exprime aussi la somme des travaux virtuels absolus des actions réciproques entre le système rigide et permanent $\mathfrak{M}'$ et le courant $\mathcal{C}$, lorsqu'ils sont transportés à une distance mutuelle infinie, sans variation de l'intensité I, mais la ligne S pouvant changer de longueur et de figure.

Car, en vertu de l'équation (106'), tout se réduit à prouver que, en transportant $\mathcal{C}$ à l'infini, on rend infiniment petit $W_{\mathfrak{M}', \mathcal{C}}$, ou (108') $\varepsilon_{\mathfrak{M}', S_1}$, ou (101) les trois fonctions $A_{\mathfrak{M}'}$, $B_{\mathfrak{M}'}$, $C_{\mathfrak{M}'}$, ou les dérivées premières de $V_{\mathfrak{M}'}$. C'est ce qui a été démontré (n° **49**).

94. L'énergie $W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = W_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'}$ des actions mutuelles de deux systèmes

$$(116) \qquad \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}'$$

comprenant respectivement les courants

$$\mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{S}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{S}_\nu \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}'_1,\ \mathfrak{S}'_2,\ \ldots,\ \mathfrak{S}'_{n'},\ \ldots,\ \mathfrak{S}'_{\nu'},$$

d'intensités constantes

$$I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n,\ \ldots,\ I_\nu \quad \text{et} \quad I'_1,\ I'_2,\ \ldots,\ I'_{n'},\ \ldots,\ I'_{\nu'},$$

dont les lignes fermées

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots,\ S_\nu \quad \text{et} \quad S'_1,\ S'_2,\ \ldots,\ S'_{n'},\ \ldots,\ S'_{\nu'},$$

peuvent se mouvoir en changeant de longueurs et de figures, sera définie la somme des travaux virtuels (n° **15**) des actions mutuelles de toutes les combinaisons d'un courant du système $\mathfrak{S}$ avec un courant du système $\mathfrak{S}'$, lorsque les deux systèmes se déforment simultanément, jusqu'à ce que toutes les aires ayant pour périmètres $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, S_\nu$ s'annulent à la fois ; et si l'on pose

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} F_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n,n'}} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)_{n'} ds'_{n'}, \\ G_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n,n'}} \left(\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)_{n'} ds'_{n'}, \\ H_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n,n'}} \left(\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)_{n'} ds'_{n'}, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(118) \quad W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = W_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'} = -\sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{S_n} \left(F_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} + G_n \frac{\partial y_n}{\partial s_n} + H_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} \right) ds_n.$$

ou

$$(118')\quad \left\{\begin{aligned} W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = W_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'} = -\sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{S_n} ds_n \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \\ \times \int_0^{S'_{n'}} \frac{ds'_{n'}}{r_{n,n'}} \left(\frac{\partial x_n}{\partial s_n} \frac{\partial x'_{n'}}{\partial s'_{n'}} + \frac{\partial y_n}{\partial s_n} \frac{\partial y'_{n'}}{\partial s'_{n'}} + \frac{\partial z_n}{\partial s_n} \frac{\partial z'_{n'}}{\partial s'_{n'}} \right), \end{aligned}\right.$$

$r_{n,n'}$ désignant la distance de ds_n à $ds'_{n'}$.

Cette généralisation de l'énoncé du n° **94** s'en déduit immédiatement par une double sommation. Elle n'est écrite qu'en vue des applications ultérieures.

95. L'énergie $W_{\mathcal{M}',\mathfrak{S}}$ des actions du système $\mathcal{M}'$ sur le système $\mathfrak{S}$ (116) de ν courants fermés permanents se déduit aussi, par une sommation, des formules (102) et (101) :

$$(119)\quad W_{\mathcal{M}',\mathfrak{S}} = -\sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \iint_{\mathrm{A}_n} (\mathrm{A}_{\mathcal{M}'}\alpha_n + \mathrm{B}_{\mathcal{M}'}\beta_n + \mathrm{C}_{\mathcal{M}'}\gamma_n)\, d\mathrm{A}_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} W_{\mathcal{M}',\mathfrak{S}_n}.$$

Cette équation ne suppose pas le système $\mathfrak{S}$ rigide ; mais, quand il l'est, on aperçoit immédiatement deux cas où les fonctions $\mathrm{A}_{\mathcal{M}'}$, $\mathrm{B}_{\mathcal{M}'}$, $\mathrm{C}_{\mathcal{M}'}$ peuvent sortir des signes sommatoires, et être remplacées par leurs valeurs A_0, B_0, C_0 en un point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$, invariablement lié à $\mathfrak{S}$.

96. Le premier cas est celui où les trois fonctions $\mathrm{A}_{\mathcal{M}'}$, $\mathrm{B}_{\mathcal{M}'}$, $\mathrm{C}_{\mathcal{M}'}$ sont constantes en tous les points d'un volume comprenant $\mathfrak{S}$ et M_0.

97. Le second cas est celui où le système $\mathfrak{S}$ est infiniment petit et infiniment voisin du point M_0.

Dans ces deux cas, soient

$$\alpha_0 \mathrm{k}_0, \quad \beta_0 \mathrm{k}_0, \quad \gamma_0 \mathrm{k}_0$$

les projections, sur trois axes à gauche rectangulaires, de la résultante

$$(120)\qquad \mathrm{k}_0 = \mathrm{I}_0 \mathrm{A}_0$$

de toutes les forces fictives

$$\mathrm{k}_n = \mathrm{I}_n d\Lambda_n,$$

appliquées à tous les éléments $d\Lambda_n$, dans les directions de leurs normales positives $\mathcal{L}_n$, définies par leurs cosinus directeurs $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$; d'où

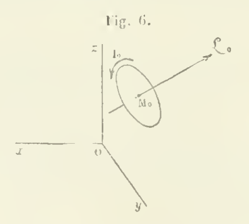
$$(121)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \mathrm{k}_0 &= \alpha_0 \mathrm{I}_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \iint_{\Lambda_n} \alpha_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} y_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} ds_n = -\sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} z_n \frac{\partial y_n}{\partial s_n} ds_n, \\ \beta_0 \mathrm{k}_0 &= \beta_0 \mathrm{I}_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \iint_{\Lambda_n} \beta_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} z_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} ds_n = -\sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} x_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} ds_n, \\ \gamma_0 \mathrm{k}_0 &= \gamma_0 \mathrm{I}_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \iint_{\Lambda_n} \gamma_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} x_n \frac{\partial y_n}{\partial s_n} ds_n = -\sum_{n=1}^{n=\nu} \mathrm{I}_n \int_0^{\mathrm{S}_n} y_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} ds_n. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux cas des n^{os} **96** et **97**, (119) devient

$$(122)\qquad \mathrm{W}_{M',\mathfrak{S}} = -\mathrm{k}_0(\mathrm{A}_0\alpha_0 + \mathrm{B}_0\beta_0 + \mathrm{C}_0\gamma_0).$$

98. C'est pourquoi l'élément fictif de solénoïde k_0, d'intensité constante I_0 et de moment k_0 (120), dont l'aire Λ_0 est plane et contient le point M_0, et dont l'axe $\mathcal{L}_0$ (*fig.* 6) a pour direction celle de la force k_0

Fig. 6.



(121), sera appelé l'*élément de solénoïde correspondant au système* $\mathfrak{S}$; son axe $\mathcal{L}_0$ et son moment k_0 seront, par définition, l'*axe* et le *moment* du système $\mathfrak{S}$.

La formule (122) résulte immédiatement des notations (121), en vertu desquelles les seconds membres de (119) et (122) sont identi-

ques. Elle peut s'écrire

$$(123)\qquad W_{M',\Xi} = W_{M',k_0};$$

et elle peut s'énoncer ainsi :

99. *M' agit sur* Ξ *comme sur* k_0.

100. L'énergie (122) étant de la forme (26), l'action de M' sur Ξ se réduit à une force appliquée au point M_0, ayant pour composantes (55)

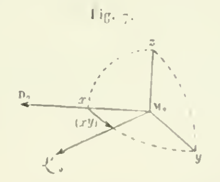
$$(124)\qquad (M',\Xi)_x = k_0\frac{\partial A_0}{\partial \zeta_0},\quad (M',\Xi)_y = k_0\frac{\partial B_0}{\partial \zeta_0},\quad (M',\Xi)_z = k_0\frac{\partial C_0}{\partial \zeta_0},$$

et pour moments par rapport aux axes, quand on prend M_0 pour origine (56, 56' et 123),

$$(125)\qquad \begin{cases} (M',\Xi)_{yz} = -\dfrac{\partial W_{M',\Xi}}{\partial(yz)} = k_0(\beta_0 C_0 - \gamma_0 B_0), \\ (M',\Xi)_{zx} = -\dfrac{\partial W_{M',\Xi}}{\partial(zx)} = k_0(\gamma_0 A_0 - \alpha_0 C_0), \\ (M',\Xi)_{xy} = -\dfrac{\partial W_{M',\Xi}}{\partial(xy)} = k_0(\alpha_0 B_0 - \beta_0 A_0). \end{cases}$$

Dans le premier cas (n° **96**), la force (124) est nulle; dans les deux cas (nos **96** et **97**), en prenant pour origine O (*fig.* 6) le point M_0

Fig. 7.



(*fig.* 7), pour axe des x la force directrice D_0 du système M' en ce point, et pour plan des xy celui de l'angle $(D_0, \zeta_0) = (xy)$, les équa-

tions (122) et (125), dans lesquelles il faut faire $A_0 = D_0$, $B_0 = C_0 = 0$, $\alpha_0 = \cos(xy)$, $\beta_0 = \sin(xy)$, $\gamma_0 = 0$, deviennent

(126) $$W_{M',\mathfrak{S}} = -k_0 D_0 \alpha_0,$$

(127) $$(M', \mathfrak{S})_{yz} = 0, \quad (M', \mathfrak{S})_{zx} = 0, \quad (M', \mathfrak{S})_{xy} = -k_0 D_0 \sin(xy).$$

101. Donc, dans les deux cas, le couple est dans le plan de l'angle $(D_0, \mathfrak{L}_0)$, tend à diminuer cet angle, et a pour moment

(128) $$(M', \mathfrak{S})_{xy} = -k_0 D_0 \sin(D_0, \mathfrak{L}_0).$$

Ce couple (128) est de même forme que celui qui déterminerait le mouvement d'un pendule mobile autour du même axe Oz, si la pesanteur agissait dans la direction D_0. Donc :

102. Si le système rigide $\mathfrak{S}$ pouvait osciller, sous l'action de M', autour d'un axe fixe passant par le point M_0, sans variation des intensités I_n, contrairement aux lois de l'induction, les petites oscillations en seraient isochrones. On sait d'ailleurs que l'induction donne naissance à une force proportionnelle à la vitesse angulaire, amortissant les oscillations, mais n'en troublant pas l'isochronisme.

103. Si le système rigide $\mathfrak{S}$ est assujetti à tourner autour de son centre de gravité M_0, il résulte des équations (127) que son axe oscillera autour de la force directrice D_0, au point M_0, du système extérieur M'.

Dans les deux cas des nos **96** et **97**, l'énergie (126) peut s'écrire

(129) $$W_{M',\mathfrak{S}} = -k_0 D_0 \cos(D_0, \mathfrak{L}_0),$$

et l'on a (106)

(130) $$\Delta \mathfrak{T}(M', \mathfrak{S}) = W - W_0,$$

W désignant la valeur initiale, et W_0 la valeur finale de la fonction

(129). Lorsque la valeur finale est nulle,

$$(131) \qquad W_0 = 0,$$

l'équation (130) devient

$$(132) \qquad \mathcal{E}(M', \Xi) = W.$$

Or la condition (131) est satisfaite (129) pour

$$(133) \qquad D, \zeta = \frac{\pi}{2},$$

et pour

$$(134) \qquad D = 0.$$

104. Soit $\mathfrak{M}'$ le système M', quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie.

105. L'énergie (129) représente, dans tous les cas, le travail virtuel, par rapport à des axes fixés à M', de l'action de M' sur le système Ξ, tournant autour de son centre de gravité, jusqu'à ce que son axe ζ y devienne perpendiculaire à la force directrice D du système agissant M'.

106. Dans le cas du n° **104**, l'énergie (129) représente le travail virtuel, par rapport à des axes fixes à $\mathfrak{M}'$, des actions de $\mathfrak{M}$ sur le système Ξ, transporté à une distance infinie de $\mathfrak{M}'$.

Car, à cette distance, l'action mutuelle étant infiniment petite, le travail virtuel de la rotation (128), et, par suite, le facteur D_0 de l'équation (129) est infiniment petit, et la condition (134) est satisfaite.

107. Dans le même cas particulier (n° **104**), les équations (130) et

(132) deviennent

$$(135)\qquad \Delta\mathfrak{T}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + \Delta\mathfrak{T}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = W - W_0,$$

$$(136)\qquad \mathfrak{T}(\mathfrak{M}', \mathfrak{S}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}') = W;$$

et les premiers membres représentent la somme des travaux virtuels absolus des actions mutuelles des deux systèmes, transportés de leurs positions initiales à leurs positions finales, que sépare, dans (136), une distance infinie. En effet, ils représentent la somme des travaux virtuels relatifs des actions de $\mathfrak{M}'$ sur $\mathfrak{S}$, par rapport à trois axes fixés à $\mathfrak{M}'$; et cette seconde somme est égale à la première, les actions mutuelles des deux systèmes étant de nature à se faire équilibre sur un système rigide.

108. La partie bien définie $V_{\mathfrak{S}'}$ du potentiel d'un système rigide et infiniment petit $\mathfrak{S}'$ de courants linéaires fermés et permanents est égale à celle de l'élément correspondant k'_0 de solénoïde (n° **98**).

En effet, en prenant pour M' un élément de solénoïde k, de moment k et d'axe ζ, et permutant les accents, (123) devient

$$(137)\qquad W_{k,\mathfrak{S}'} - W_{k,k_0} = 0.$$

Mais (61) et (62)

$$W_{k,\mathfrak{S}} = W_{\mathfrak{S}',k} = \mathrm{k}\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \zeta} = \mathrm{k}\frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{S}}}{\partial \zeta}$$

et pareillement

$$W_{k,k'_0} = \mathrm{k}\frac{\partial \mathcal{V}_{k'_0}}{\partial \zeta},$$

et, en substituant dans (137), $\dfrac{\partial(\mathcal{V}_{\mathfrak{S}'} - \mathcal{V}_{k'_0})}{\partial \zeta} = 0$. Donc la différence $\mathcal{V}_{\mathfrak{S}'} - \mathcal{V}_{k'_0}$, à la fois constante en un point quelconque, où l'on peut toujours placer k, et infiniment petite (n° **58**) à l'infini, est identi-

quement nulle, ce qui démontre (n° **108**)

$$(138) \qquad V_{\Sigma'} = V_{k_0}.$$

§ V. — Seconde méthode pour la solution du même problème.

109. En vertu de la théorie qui précède et conformément à celle d'Ampère, l'action du système extérieur M', rigide et invariable dans sa constitution physique, pouvant comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, sur un courant fermé et rigide Σ, d'intensité constante I et de longueur S, fixe par rapport à M', a (105) pour travail élémentaire virtuel (n° **15**), par rapport à des axes fixes à M',

$$(139) \qquad d\tau(M', \Sigma) = -dW_{M', \Sigma},$$

et l'énergie de l'action de M' sur Σ est (102)

$$(140) \qquad W_{M', \Sigma} = -I\varepsilon_{M', S};$$

le flux de force envoyé par M' sur la face négative d'une aire A, terminée au périmètre S étant (101)

$$(141) \qquad \varepsilon_{M', S} = \iint_A (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dA,$$

A, B, C désignant les composantes de la force directrice D du système M' en un point de l'élément dA, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale positive en ce point, normale qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant I, verrait à sa gauche. Ces trois formules équivalent à la formule unique

$$(142) \qquad d\tau(M', \Sigma) = I\, d\iint_A (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dA.$$

110. Les cas d'équilibre invoqués dans le § II n'ayant pas tous été

observés d'une manière satisfaisante, on pourrait douter de l'exactitude de l'équation (142), en partie déduite de ces équilibres. Mais Weber a vérifié avec beaucoup de soin la formule d'Ampère (105 et 109')

$$(143) \qquad d\tau(\mathfrak{S}', \mathfrak{S}) = \mathrm{II}' d\int_0^{\mathrm{S}} ds \int_0^{\mathrm{S}'} ds' \frac{\cos(ds, ds')}{r},$$

à laquelle se réduit (142), dans le cas où M' est un courant fermé linéaire $\mathfrak{S}'$, d'intensité I'; et, par suite de vérifications ultérieures, cette formule (142), malgré sa complication, est un des principes expérimentaux les mieux établis. Posant comme un postulatum le principe suivant :

111. L'action du système M' sur un élément I*ds* de courant linéaire extérieur se réduit à une force unique, appliquée à *ds* et proportionnelle au produit I*ds*; il s'agit de démontrer cet autre énoncé :

112. Le problème de l'action du système M' sur un élément I*ds* de courant linéaire extérieur n'a qu'une solution compatible avec les principes exprimés par l'équation (142) et le n° **111** : elle est donnée par les formules (11) d'Ampère

$$(144) \qquad \begin{cases} (M', \mathrm{I}ds)_x = \mathrm{I}(\mathrm{C}dy - \mathrm{B}dz) = \mathrm{I}\xi\, ds, \\ (M', \mathrm{I}ds)_y = \mathrm{I}(\mathrm{A}dz - \mathrm{C}dx) = \mathrm{I}\eta\, ds, \\ (M', \mathrm{I}ds)_z = \mathrm{I}(\mathrm{B}dx - \mathrm{A}dy) = \mathrm{I}\zeta\, ds. \end{cases}$$

La démonstration de l'énoncé **112** repose sur le suivant :

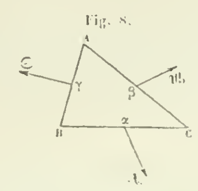
113. *Lemme.* — Lorsqu'un système M' de plusieurs corps, susceptible de se réduire à un seul, et dont chacun ne peut produire, sur tout élément de courant linéaire extérieur, qu'une force unique, appliquée à son milieu, n'a pas d'action sur les courants linéaires extérieurs, fermés et rigides, il n'en a pas non plus sur un élément extérieur de courant linéaire.

Il suffit de démontrer que les trois forces $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (*fig.* 8), produites

par M' sur les milieux α, β, γ des côtés infiniment petits d'un courant fermé triangulaire rigide I.ABCA, et s'y faisant équilibre, sont nulles.

Supposons, si c'est possible, que $\mathcal{A}$ ne le soit pas. Ayant un moment nul par rapport à $\beta\gamma$, elle est dans le plan du triangle, et doit y rester.

Fig. 8.



s'il tourne autour de BC. Donc elle est tangentielle, et, composée avec $\mathcal{B}$, qui est nulle ou dirigée suivant AC, elle donne une résultante, qui ne peut être nulle, et qui passe par le point C. Or la force $\mathcal{C}$, qui ne peut agir que suivant AB, ne peut détruire cette résultante; ce qui contredit l'hypothèse et démontre le lemme par l'absurde.

114. Ce lemme établit l'énoncé **112**, c'est-à-dire l'identité de deux forces définies par les expressions générales de leurs composantes

$$I\xi ds, \quad I\eta ds, \quad I\zeta ds \quad \text{(solution d'Ampère)}$$

et

$$I(\xi + \xi_1)ds, \quad I(\eta + \eta_1)ds, \quad I(\zeta + \zeta_1)ds,$$

appliquées au milieu de ds, et représentant des actions de M' sur $I ds$, compatibles avec la formule (142) et le principe du n° **111**.

Car les intégrales des travaux élémentaires virtuels de ces deux forces, étendues à tous les éléments d'une ligne quelconque S, fermée et rigide, dont ds fait partie, sont égales (142) pour tout déplacement infiniment petit de cette ligne. Donc leur différence, ou l'intégrale, par rapport à S, du travail élémentaire de la force complémentaire, qui a pour composantes $\xi_1 I ds$, $\eta_1 I ds$, $\zeta_1 I ds$, est identiquement nulle pour le même déplacement; un système fictif, qui produirait sur $I ds$ cette force complémentaire, ne pourrait agir sur aucun courant linéaire

fermé et rigide, ni par suite (n° **113**) sur $1ds$. Donc

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0,$$

ce qui démontre l'énoncé du n° **112**.

115. Ainsi, à l'ensemble des principes du § II, qui renferment deux postulata (n^os^ **23** et **24**), on peut substituer la relation (142) et l'énoncé du n° **111**, qui n'en renferment qu'un (n° **111**), et qui sont incompatibles avec toute solution différente de celle d'Ampère.

116. Ce résultat a été démontré analytiquement par M. Maurice Lévy au Collège de France (Leçon du 11 février 1881), pour le cas où le système agissant est un courant fermé linéaire. Le lemme (113) en fournit une démonstration synthétique, applicable à l'action du système général M', qui peut comprendre aussi des aimants et le magnétisme terrestre.

Sur le principe de la moindre action;

Par M. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Le théorème de la moindre action a été complété par M. Serret (¹), qui a démontré que la variation du deuxième ordre de l'action est essentiellement positive. L'analyse du savant géomètre étant assez difficile, il m'a semblé qu'une démonstration plus élémentaire du théorème ne serait pas dépourvue d'intérêt.

2. Soit donné un système de n points à p liaisons dans sa position initiale $a, a_1, \ldots$, soumis à l'action des forces ayant une fonction potentielle U. Examinons deux mouvements extrêmement voisins de ce système : $af, a_1f_1, \ldots$ et $ab, a_1b_1, \ldots$ pour lesquels la constante h, dans l'intégrale des forces vives

$$(1) \qquad U - F + h = 0,$$

est la même, F étant la somme des forces vives.

En désignant, avec M. Thomson, par (a, f) l'action dans le premier mouvement et par t le temps de ce mouvement, écrivons

$$(2) \qquad (a, f) = \int_0^t 2F\,dt$$

ou, à cause de la formule (1),

$$(a, f) = \int_0^t (U + F + h)\,dt.$$

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII, p. 696, 1871.

Déterminons la variation $(a, b) - (a, f)$.

$$(a, b) - (a, f) = \Big|^t 2\mathrm{F}\,\partial t + \int_0^t \sum \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,\partial x + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\,\partial y + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\,\partial z\right) dt$$
$$+ \int_0^t \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\partial x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\partial y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\partial z}{dt}\right) dt.$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^t \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\partial x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\partial y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\partial z}{dt}\right) dt$$
$$= \Big|_0^t \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\partial x + \frac{dy}{dt}\,\partial y + \frac{dz}{dt}\,\partial z\right)$$
$$- \int_0^t \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\partial x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\partial y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\partial z\right) dt.$$

Mais on a

$$\Big|^0 \partial x = 0, \quad \Big|^t \partial x = \partial \Big|^t x - \Big|^t \frac{dx}{dt}\,\partial t,$$

$$\partial \Big|^t x \Big|^t \frac{dx}{dt} + \partial \Big|^t y \Big|^t \frac{dy}{dt} + \partial \Big|^t z \Big|^t \frac{dz}{dt} = v \cos\alpha\,\partial s,$$

formule dans laquelle v représente la vitesse du point f, ∂s l'élément fb, et α un angle entre v et ∂s. Il vient ainsi

$$\int_0^t \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\partial x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\partial y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\partial z}{dt}\right) dt$$
$$= \sum mv\cos\alpha\,\partial s - \Big|^t 2\mathrm{F}\,\partial t$$
$$- \int_0^t \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\partial x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\partial y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\partial z\right) dt,$$

et la variation devient

$$(a, b) - (a, f) = \sum mv\cos\alpha\,\partial s$$
$$+ \int_0^t \sum m\left[\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\partial x\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\mathrm{U}}{dy} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\partial y + \left(\frac{d\mathrm{U}}{dz} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\partial z\right].$$

L'intégrale est nulle à cause de la formule générale de la Dynamique, et nous trouvons

$$(3)\qquad (a, b) - (a, f) = \Sigma mv \cos\alpha\, \delta s.$$

Ainsi, pour que

$$(a, b) = (a, f),$$

il faut et il suffit que les éléments fb, $f_1 b_1$, ... satisfassent l'équation

$$(4)\qquad \Sigma mv \cos\alpha\, \delta s = 0.$$

Nous nommerons les éléments fb, $f_1 b_1$, ... les *lignes de l'égale action*.

5. Comparons l'action (a, c, d) dans un mouvement réel avec l'action (a, b, d) dans un mouvement quelconque, compatible avec les liaisons et satisfaisant à l'équation (1), la constante h étant la même dans tous les deux mouvements.

Soient b, b_1, ... les positions simultanées des points du système dans le second mouvement. Construisons les trajectoires ab, $a_1 b_1$, ... d'un mouvement réel auxiliaire ayant aussi des points simultanés b, b_1, ... et la même constante h. Ce mouvement auxiliaire sera entièrement fixé, puisque nous aurons pour la détermination de $3n - p$ composantes arbitraires des vitesses initiales $3n - p - 1$ équations exprimant que les points du système passent en même temps en b, b_1, ... et une équation (1).

Construisons pareillement les trajectoires ac, $a_1 c_1$, ... du mouvement auxiliaire pour les points simultanés c, c_1, ... et pour tous les autres points simultanés du mouvement abd, $a_1 b_1 d_1$, ...

Éliminons maintenant dt de l'action (a, b, d) à l'aide de la formule (1), comme le fait M. Jacobi,

$$(5)\qquad (a, b, d) = \int \sqrt{2(U + h)}\, \sqrt{\Sigma m\, dl^2},$$

où dl, dl_1, ... sont les éléments des trajectoires abd, $a_1 b_1 d_1$, ... parcourues dans le temps dt.

Soient

$$dl = bc, \quad dl_1 = b_1 c_1, \quad \ldots$$

Menons par les points b, b_1, ... les éléments

$$fb = \delta s, \quad f_1 b_1 = \delta s_1, \quad \ldots$$

des lignes de l'égale action pour les mouvements auxiliaires, les points f, f_1, ... étant placés sur les trajectoires ac, $a_1 c_1$, ..., et posons

$$fc = d\sigma, \quad f_1 c_1 = d\sigma_1, \quad \ldots.$$

Nous avons

$$dl^2 = d\sigma^2 + \delta s^2 - 2\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha.$$

Multiplions par la masse m et prenons la somme étendue sur tous les points du système,

$$\Sigma m\, dl^2 = \Sigma m\, d\sigma^2 + \Sigma m\, \delta s^2 - 2 \Sigma m\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha.$$

Par l'équation (4),

$$\Sigma m\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha = dt_1 \Sigma m v\, \delta s \cos\alpha = 0,$$

dt_1 étant l'élément du temps dans lequel les points du système parcourent les arcs infiniment éloignés $fc, f_1 c_1$, ... On aura

$$\Sigma m\, dl^2 > \Sigma m\, d\sigma^2,$$

ou

$$(6) \qquad \sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > \sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, d\sigma^2}.$$

Mais nous avons

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, d\sigma^2} = (f, c) = (a, c) - (a, f) = (a, c) - (a, b) = d(a, b),$$

et la formule (6) devient

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > d(a, b).$$

Prenons de toutes les deux parties l'intégrale étendue sur tous les éléments des lignes abd, $a_1 b_1 d_1$, ...

$$(7) \qquad \int \sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > (a, c, d),$$

ou par (5),

$$(a, b, d) > (a, c, d). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Sur les fonctions itératives;

PAR M. JULES FARKAS,
Professeur à l'Université de Budapesth.

En supposant k un nombre entier et positif, l'itérative de $k^{\text{ième}}$ degré de la fonction $f(z)$, désignée par $f^k(z)$, ou z_k, est définie par la formule récurrente

$$z_k = f(z_{k-1}), \quad z_0 = z.$$

Sur la théorie générale des fonctions itératives, il n'y a que deux Mémoires, publiés par M. E. Schroeder dans les *Annales de Clebsch*. Les questions traitées par M. Schroeder sont celles de la convergence ([1]) et celle de l'itération analytique ([2]). En supposant la fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire T, et que toutes ses itératives soient des points de l'aire T, si l'algorithme z_k tend vers une même limite quand le nombre k devient infini d'une manière quelconque, la limite $\lim z_k = \zeta$ est une racine de l'équation $f(z) = z$, parce qu'alors on a

$$\lim z_{k+1} = \lim z_k;$$

d'où, en vertu de la définition, $\lim f(z_k) = \lim z_k$, c'est-à-dire $f(\zeta) = \zeta$. C'est dans ce cas que les itératives sont dites convergentes dans l'aire T.

([1]) *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen* t. II.

([2]) *Ueber iterirte Functionen*, t. III.

Si la fonction $f(z)$ satisfait à certaines conditions, ses itératives sont convergentes, et, dans ma première Note, j'établis une sorte de telles conditions. Le problème de l'itération analytique a pour but d'exprimer les itératives d'une fonction analytique par une fonction analytique de l'indice k considérée comme variable indépendante. En étendant la définition de z_k sur des valeurs fractionnaires et négatives de l'indice k; dans ma seconde Note, j'établis et je traite la forme générale de la fonction analytique de deux variables $F(k, z)$ définie par l'expression

$$F(k, z) = f^k(z).$$

I. — Sur la convergence des fonctions itératives.

1. Désignons par $f(T)$ l'aire décrite par le point $z_1 = f(z)$ quand le point z décrit l'aire T.

Si l'aire $f(T)$ *est située dans l'aire* T *et que l'aire* T *se puisse concentrer en un point* ζ *de manière que l'aire* $f(T)$ *reste toujours dans l'aire* T, *les itératives de* $f(z)$ *sont convergentes dans cette aire.*

En effet, que le contour de l'aire en concentration T soit arrivé au point z, et à ce moment désignons par T_1 l'aire diminuée T. Le point $z_1 = f(z)$ est dans l'aire T_1, parce que, en vertu de la supposition, l'aire $f(T_1)$ est dans l'aire T_1. En continuant la concentration, le contour de l'aire T_1 est arrivé au point z_1: à ce moment, désignons par T_2 l'aire diminuée T. Le point $z_2 = f(z_1)$ est dans l'aire T_2, parce que l'aire $f(T_2)$ est dans l'aire T_2, et ainsi de suite; que le contour de l'aire en concentration soit arrivé au point $z_k = f(z_{k-1})$, et à ce moment désignons par T_k l'aire diminuée T. Le point $z_{k+1} = f(z_k)$ est dans l'aire T_k, parce que l'aire $f(T_k)$ est dans l'aire T_k. Or $\lim T_k = \zeta$, par conséquent $\lim z_k = \zeta$ et $\lim z_{k+1} = \lim z_k$.

Considérons, par exemple, la fonction

$$(1) \qquad f(z) = a + \sqrt[n]{z},$$

où n est un nombre positif supérieur à l'unité. La fonction $\sqrt[n]{z}$ est holo-

morphe dans toute l'étendue du plan traversé par une droite R dont l'un des points extrêmes est dans l'origine, et l'autre dans l'infini. Désignons par α l'argument du point fixe a. Si l'argument commun des points de la droite R est $\alpha + \pi$ ou $\alpha - \pi$ ou dans le voisinage soit de $\alpha + \pi$, soit de $\alpha - \pi$, le plan traversé par la droite R satisfait à l'exigence attribuée à l'aire T dans notre théoreme. Ainsi, en posant

$$z_k - a = z'_{k-1},$$

c'est-à-dire

$$z' = \sqrt[n]{z}, \quad z'_1 = \sqrt[n]{a + z'}, \quad z'_2 = \sqrt[n]{a + z'_1}, \quad z'_3 = \sqrt[n]{a + z'_2}, \quad \ldots,$$

la limite $\lim z_k$ est une racine de l'équation $z^n = z + a$, et l'on en obtient l'une ou l'autre des racines suivant que l'on sort de l'une ou de l'autre des valeurs de la racine $z' = \sqrt[n]{z}$.

2. Du théorème général on tire aisément le suivant : *Si (1) la fonction $f(x)$ est d'une valeur réelle et croissante pour une valeur réelle et croissante de x comprise entre les limites p et q, et que l'on ait*

$$(2) \qquad p < q,$$

$$(3) \qquad p < f(p), \quad q > f(q),$$

les itératives de $f(x)$ sont convergentes, théorème dont voici la preuve directe :

En vertu de (1) et (2),

$$f(p) < f(x) < f(q),$$

par conséquent (3)

$$p < f(x) < q,$$

c'est-à-dire $p < x_1 < q$. On en conclut (1)

$$f(p) < f(x_1) < f(q),$$

d'où (3)

$$p < f(x_1) < q.$$

c'est-à-dire $p < x_2 < q$, et ainsi de suite. On a, en général, $p < x_k < q$; toutes les itératives de $f(x)$ sont comprises entre les limites p et q. Cela étant, considérons les deux cas suivants : celui d'un x, tel que l'on ait $x_1 > x$, et celui d'un x, tel que l'on ait $x_1 < x$. Comme x et x_1 sont compris entre les limites p et q, on a (1)

$$(cas\ 1)\quad f(x_1) > f(x), \qquad (cas\ 2)\quad f(x_1) < f(x),$$

c'est-à-dire (cas 1) $x_2 > x_1$, (cas 2) $x_2 < x_1$. Comme x_1 et x_2 sont compris de même entre les limites p et q, on a (1)

$$(cas\ 1)\quad f(x_2) > f(x_1), \qquad (cas\ 2)\quad f(x_2) < f(x_1),$$

ou bien $x_3 > x_2$ (cas 1), $x_3 < x_2$ (cas 2), et ainsi de suite; en général,

$$(cas\ 1)\quad p < x < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < q.$$
$$(cas\ 2)\quad q > x > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > q.$$

On en conclut $\lim x_{k+1} = \lim x_k$ quelle que soit la valeur de x, pourvu qu'elle soit comprise entre les limites p et q.

Exemples.

Exemple I :

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})^{\frac{1}{n}},$$

où les constantes a sont des quantités positives. Si x est d'une valeur positive, et que l'on opère toujours par la valeur positive de la fonction, la limite $\lim x_k$ est une racine de l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = x^n.$$

Exemple II :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

où les constantes a sont des quantités positives inférieures à $\frac{1}{4}$. Les itératives sont convergentes pour des valeurs positives de x inférieures à $\frac{1}{2}$.

Exemple III :

$$f(x) = a + b(\sin x)^n,$$

où n est un nombre entier positif, a et b sont des quantités positives et $a + b < \frac{\pi}{2}$. La condition de la convergence est $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Exemple IV :

$$f(x) = a + b(\log x)^n,$$

où n est un nombre entier et positif supérieur à l'unité, a et b sont des quantités positives et

$$a > 1, \quad b < \left(\frac{n-1}{a-1}\right)^{n-1}.$$

La convergence subsiste si $1 < x^{n-1} < e^{a-1}$.

Exemple V :

$$f(x) = \cos(a - bx),$$

où a et b sont des quantités positives et $b < a < \frac{\pi}{2}$. Si $0 < bx < a$, les itératives sont convergentes.

Exemple VI :

$$f(x) = \log(a + bx),$$

où a et b sont des quantités positives, $a > 1$, $b < 1$. Dans ce cas, la condition de la convergence est $0 < (1 - b)x < a - 1$.

II. — Sur l'itération analytique.

1. En supposant n et m des nombres entiers et positifs pour définition de l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$, désignée par $q_1 = z_{\frac{n}{m}}$, posons

$$q_m = z_n.$$

Ainsi l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$ n'est autre chose que

la fonction dont l'itérative de degré m est égale à l'itérative de degré n de la fonction $f(z)$. La définition de l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ est donnée par l'équation

$$f^k(z_{-k}) = z,$$

où k est un nombre positif ou négatif. Donc l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ désignée par p est la solution de l'équation $f^k(p) = z$, où k est un nombre positif, et le degré de l'itérative p est $-k : p = f^{-k}(z)$.

De ces définitions on déduit aisément

$$(1)\qquad f^h(z_k) = f^k(z_h) = f^{h+k}(z),$$

où h et k sont des nombres réels. Ainsi, en écrivant $f^k(z) = \mathrm{F}(k, z)$, on a

$$(2)\qquad \mathrm{F}(h+k, z) = \mathrm{F}[k, \mathrm{F}(h, z)].$$

Admettons que la fonction z_k ait une dérivée par rapport à k. Alors nous avons (2)

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h}\frac{\partial z_h}{\partial h}.$$

Ainsi, comme (2),

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h}\frac{\partial z_h}{\partial z},$$

on a

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} : \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_h}{\partial h} : \frac{\partial z_h}{\partial z};$$

d'où, en posant $h + k = u$, $h = v$,

$$\frac{\partial z_u}{\partial u} : \frac{\partial z_u}{\partial z} = \frac{\partial z_v}{\partial v} : \frac{\partial z_v}{\partial z}.$$

Donc le rapport des dérivées $\frac{\partial z_k}{\partial k}$ et $\frac{\partial z_k}{\partial z}$ est indépendant de la variable k. Posons

$$\frac{\partial z_k}{\partial k} : \frac{\partial z_k}{\partial z} = c\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où c est une constante. La solution générale de cette équation étant

$$z_k = \psi\left[c^k \varphi(z)\right],$$

comme $z_0 = z$, et, par conséquent, $\psi[\varphi(z)] = z$, *la forme générale de la fonction* $F(k, z)$ *est*

$$(3) \qquad F(k, z) = \varphi^{-1}[a^k \varphi(z)],$$

où a est une constante, et φ est une fonction définie par l'équation

$$(4) \qquad \varphi[f(z)] = a\varphi(z).$$

De (4) on déduit, en effet, aisément

$$(5) \qquad \varphi[f^k(z)] = a^k \varphi(z),$$

formule indiquée aussi par M. Schrœder dans un Mémoire sur les fonctions itératives, mais sans en reconnaître la généralité.

2. Ainsi l'étude de l'itération analytique est réduite à celle de la fonction φ.

Désignons par ζ l'une des racines de l'équation $f(z) = z$, et supposons la fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle C décrit du point ζ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité. Posons

$$(6) \qquad (a - a^n)\alpha_{n+1} = \alpha_1 D_{1,n+1} + \alpha_2 D_{2,n+1} + \ldots + \alpha_n D_{n,n+1},$$

où

$$(7) \qquad \alpha_1 = 1, \quad a = f'(\zeta),$$

et $D_{m,n+1}$ est le coefficient de $(z - \zeta)^{n+1}$ dans le développement de $[f(z) - \zeta]^m$:

$$(8) \qquad (n+1)!\, D_{m,n+1} = \frac{d^{n+1}[f(z) - \zeta]^m}{dz^{n+1}}, \quad z = \zeta.$$

Dans le cercle de convergence de la série

$$\Phi(z) = \alpha_1(z - \zeta) + \alpha_2(z - \zeta)^2 + \ldots,$$

on a évidemment $\varphi(z) = \Phi(z)$. Écrivons

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 + \ldots, \quad \operatorname{mod} a_m = \alpha_m,$$

où $a_0 = \zeta$, $a_1 = a$. Évidemment la série

$$F(z) = a'_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 + \ldots$$

est convergente dans le cercle C, et, en posant

$$\alpha'_{n+1} \operatorname{mod} a(1 - a^n) = \alpha'_1 F(\zeta + 1) + \alpha'_2 F(\zeta + 1)^2 + \ldots + \alpha'_n F(\zeta + 1)^n,$$
$$\alpha'_1 = 1,$$

comme (8)

$$F(\zeta + 1)^m > \operatorname{mod} D_{m,n+1},$$

on a (6)

$$\alpha'_{n+1} > \operatorname{mod} \alpha_{n+1};$$

par conséquent, la série $\Phi(z)$ est convergente dans le cercle de convergence de la série

$$\alpha'_1(z - \zeta) + \alpha'_2(z - \zeta)^2 + \ldots.$$

Or

$$\frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha'_n} = \operatorname{mod} \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a^n} + \frac{F(\zeta + 1)^n}{\operatorname{mod} a(1 - a^n)},$$

d'où, dans le cas de $\operatorname{mod} a > 0$, $F(\zeta + 1) < 1$; $\lim \frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha_n} = 1$. Nous avons donc ce théorème : *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit d'une des racines ζ de l'équation $f(z) = z$ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité, et que l'on ait*

$$\operatorname{mod} f'(\zeta) + \tfrac{1}{2} \operatorname{mod} f''(\zeta) + \tfrac{1}{2.3} \operatorname{mod} f'''(\zeta) + \ldots < 1, \quad 1 < \operatorname{mod} f'(\zeta) = 0,$$

la fonction φ est holomorphe dans le cercle décrit du même centre ζ avec un rayon égal à l'unite.

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence de M. R. Clausius [1];

Par M. G.-J. LEGEBEKE,

Professeur à l'École Polytechnique de Delft

M. Clausius a démontré [2] une formule se rapportant à l'influence mutuelle des charges électriques d'une série de conducteurs. L'auteur, en parlant de cette formule, la nomme *nouvelle* et *très générale*. Je me propose, dans les pages suivantes, de démontrer que cette formule de M. Clausius n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale qui, à son tour, peut être considérée comme une généralisation d'une équation connue de Gauss.

Soient

C_1, C_2, ..., généralement C, des surfaces fermées, et supposons que sur chacune d'elles est étendue une couche d'un agent quelconque agissant suivant les lois connues de l'attraction;

h_1, h_2, ..., généralement h, la densité de l'agent dans les divers points de C_1, C_2, ..., C;

U_1, U_2, ..., généralement U, le niveau potentiel de toutes ces couches aux mêmes points;

V_1, V_2, ..., généralement V, les équivalents des U quand on rem-

(1) Traduction française, faite par l'auteur, d'un Mémoire qu'il a publié dans les *Annales de Physique et de Chimie* de Wiedemann, t. X, p. 154.

(2) *Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 73.

place les charges de C par d'autres avec les densités $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, ..., généralement $\mathfrak{h}$;

$d\omega_1$, $d\omega_2$, ..., généralement $d\omega$, les éléments de la surface de C_1, C_2, ..., C.

Avec ces notations, je dis qu'on a

$$\int U_1 \mathfrak{h}_1 \, d\omega_1 + \int U_2 \mathfrak{h}_2 \, d\omega_2 + \ldots = \int V_1 h_1 \, d\omega_1 + \int V_2 h_2 \, d\omega_2 + \ldots$$

ou

(1) $$\Sigma \int U \mathfrak{h} \, d\omega = \Sigma \int V h \, d\omega.$$

Avant de la démontrer, j'observe qu'il est permis d'appliquer cette formule à une série de corps conducteurs C_1, C_2, ... chargés de deux manières différentes qui s'influencent mutuellement; or, dans ce cas, les niveaux potentiels U et V sont des constantes et la formule nous donne l'équation de Clausius.

Pour démontrer la formule (1), je me servirai, comme le fait M. Clausius, de l'équation connue de Green. Concevons l'espace enveloppé par la surface C et prenons pour les deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation de Green les fonctions U_i et V_i, qui seront respectivement les niveaux potentiels, à l'intérieur de C, de toutes les couches avec les densités h et $\mathfrak{h}$; la formule de Green nous donne

$$\int U_i \frac{dV_i}{dn} d\omega = \int V_i \frac{dU_i}{dn} d\omega.$$

L'opération $\frac{d}{dn}$ est la différentiation suivant la normale dirigée intérieurement de C. En appliquant le théorème de Green successivement aux espaces enveloppés par toutes les surfaces et en ajoutant tous les résultats, on obtient

(2) $$\sum \int U_i \frac{dV_i}{dn} d\omega = \sum \int V_i \frac{dU_i}{dn} d\omega.$$

Concevons maintenant un espace limité par les surfaces des conducteurs C et par celle d'une sphère d'un rayon aussi grand que l'on voudra et qui enveloppe tous les corps, et substituons les niveaux

potentiels des couches h et $\mathfrak{h}$ aux points situés à l'extérieur de C, que nous nommerons U_e et V_e, aux fonctions arbitraires de la formule de Green; on a

$$(3) \qquad \sum \int U_e \frac{dV_e}{dN} d\omega = \sum \int V_e \frac{dU_e}{dN} d\omega,$$

le rayon de la sphère étant infini.

L'opération $\frac{d}{dN}$ est la différentiation suivant la normale dirigée extérieurement de C. Évidemment les fonctions U_i et U_e, V_i et V_e dans les équations (2) et (3) ont la même valeur U et V pour le même point d'une des surfaces C; quant aux quotients différentiels, il se présente une différence.

Soit P_i le niveau potentiel de la couche étendue à la surface de C aux points à l'intérieur de C et Π_i le niveau potentiel des couches restantes; soient P_e et Π_e les niveaux potentiels correspondants dans les points à l'extérieur de C, et soient les densités des couches h, on aura

$$\frac{dU_i}{dn} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{d\Pi_i}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dU_e}{dN} = \frac{dP_e}{dN} + \frac{d\Pi_e}{dN}.$$

Évidemment on a, pour les points de C,

$$\frac{d\Pi_i}{dn} = -\frac{d\Pi_e}{dN}$$

et, d'après une propriété connue,

$$\frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_e}{dN} = -4\pi\varepsilon h,$$

où ε est une constante; par conséquent, on a

$$\frac{dU_i}{dn} + \frac{dU_e}{dN} = -4\pi\varepsilon h$$

et, de la même manière,

$$\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_e}{dN} = -4\pi\varepsilon\mathfrak{h}.$$

En ajoutant les membres correspondants des équations (2) et (3), on a donc

$$\Sigma \int U \mathfrak{h}\, d\omega = \Sigma \int V h\, d\omega.$$

Il me reste encore à faire voir que cette équation peut être considérée comme une généralisation d'une formule de Gauss.

Soient U le niveau potentiel d'un système de masses m_1, m_2, ..., qui sont situées aux points p_1, p_2, ..., et V le niveau potentiel des masses μ_1, μ_2, ..., qui se trouvent aux points π_1, π_2, ...; soient encore U_1, U_2, ..., les valeurs de U dans ces derniers points et V_1, V_2, ... les valeurs de V aux points p_1, p_2, ...; la formule de Gauss nous donne

$$U_1 \mu_1 + U_2 \mu_2 + \ldots = V_1 m_1 + V_2 m_2 + \ldots,$$

ou

$$\Sigma U \mu = \Sigma V m.$$

Cette équation est identique, parce que les deux membres contiennent les mêmes combinaisons. Gauss [1] n'a pas démontré rigoureusement que cette formule est applicable au cas où l'on étend d'abord les masses m sur une surface C, et ensuite les masses μ sur la même surface; seulement il a donné quelques points essentiels de la manière dont on pourrait se servir pour justifier cette généralisation.

Dans ce qui précède, cette formule, qui a lieu pour un nombre arbitraire de surfaces, est déduite d'une manière bien simple de l'équation de Green.

---

[1] Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, § 19.

Actions mécaniques produites par les aimants et par le magnétisme terrestre [1];

PAR M. PAUL LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques.

INTRODUCTION.

Dans la célèbre hypothèse proposée par Ampère pour ramener à une seule les trois actions mécaniques produites par les courants fermés, par les aimants et par le magnétisme terrestre, on peut distinguer les deux hypothèses suivantes :

117 [2]. Ces trois actions, en apparence différentes, sont dues à une cause unique.

118. Cette cause consiste dans l'existence de courants électriques fermés à l'intérieur de chaque molécule magnétique et de la Terre.

La première est démontrée, sauf deux coïncidences fortuites très invraisemblables; la seconde ne l'est pas : voilà la conclusion de ce Mémoire. Tout le monde croyait, il est vrai, à la première, mais on y

(1) Présenté à l'Académie des Sciences le 16 avril 1883 (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 1123).

(2) Les numéros de ce Mémoire font suite à ceux du premier (t. X de ce Journal, p. 43).

croyait sans preuve. Toutes les conséquences observables de la seconde, qui implique la première, ont été vérifiées. Le silence des expérimentateurs le prouve depuis soixante ans; car, si un seul fait contradictoire eût été observé, on l'aurait aussitôt signalé comme renversant la théorie d'Ampère.

Les auteurs, sans le dire explicitement, ont paru admettre l'accord de tous les phénomènes observables avec cette théorie, non comme un fait physique, mais comme une identité purement mathématique, résultant uniquement de ce que, parmi les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, les cinq qu'on a pu observer satisfont aux mêmes lois; ils n'ont pas paru apercevoir qu'il y a en outre, entre les cinq coefficients absolus de ces actions, deux équations de condition résultant de la seconde hypothèse **118**, et n'ayant pas de raison d'être, toutes les lois étant sauvegardées, si la première **117** n'était pas vraie. Au lieu d'être admis comme un principe rationnel, cet accord de la théorie et de l'expérience aurait dû, à défaut de démonstration, être contesté, comme il l'a été, pour la première fois peut-être, par MM. Mascart et Joubert au n° **455** des *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*.

Il est facile de voir, d'ailleurs, ce qui manque à la démonstration de l'énoncé **117**, quand on sait seulement que les actions reçues et produites par les solénoïdes passent par leurs pôles, et sont réciproques aux carrés des distances. L'unité de pôle de solénoïde étant définie celle qui repousse son égale avec l'unité de force à l'unité de distance, et l'unité de pôle d'aimant celle que l'unité de pôle de solénoïde repousse avec la même force à la même distance, il reste à démontrer : 1° que l'unité de pôle d'aimant repousse aussi son égale avec l'unité de force à l'unité de distance; 2° que le magnétisme terrestre agit avec la même intensité sur l'unité de pôle de solénoïde et sur l'unité de pôle d'aimant. Voilà les deux faits que l'expérience seule peut établir, et qui reviennent au suivant.

119. Parmi les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, toutes celles que l'on peut observer, au nombre de cinq, sont réductibles à un seul système d'unités absolues. On l'appelle *système électromagnétique*.

Ainsi les énoncés **117** et **119** sont équivalents.

Les expériences directes qui démontreraient l'énoncé **119** n'ont pas été faites : elles consistent dans des mesures absolues d'attractions et de répulsions. Mais on verra, dans ce Mémoire, qu'elles se ramènent à d'autres beaucoup plus simples, plus faciles, susceptibles d'une plus grande précision, qui n'ont pas été faites, mais dont le résultat n'est pas douteux, en sorte qu'elles peuvent être invoquées comme des principes expérimentaux. Elles établissent le fait suivant.

120. Dans le champ de force du magnétisme terrestre, troublé ou non par des courants et des aimants, les axes d'un aimant et d'un solénoïde infiniment petits prennent toujours la même direction d'équilibre stable, quand ces deux corps sont mobiles autour de leurs centres de gravité respectifs, placés successivement en un même point.

Ce principe, déjà démontré en 1870, dans une Note qui paraît n'avoir pas été aperçue (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, p. 533), va l'être de nouveau dans ce Mémoire, où il est ramené à des cas d'équilibre encore plus simples, dispensant de déterminer les axes magnétiques et de mesurer des angles. Le premier de ces équilibres, adjoint aux quatre principes expérimentaux **21**, **23**, **24** et **25**, va suffire pour démontrer l'existence des pôles d'un élément magnétique, et pour en déterminer le potentiel.

121. Si le principe **117** n'était pas vrai, les axes magnétiques de l'aimant et du solénoïde **120** oscilleraient au contraire autour de deux directions généralement différentes, comme on le verra à la fin de ce Mémoire, à moins que la coïncidence ne résultât d'un hasard bien singulier.

Le second principe d'Ampère **118** reste sans démonstration, et n'est pas le seul qui puisse expliquer le premier **117**. La théorie conçue par Faraday, développée par Maxwell, et qui attribue les neuf actions mutuelles à un même mode de propagation dans un même milieu, en rend également compte. L'unité de la cause de ces neuf actions doit résider dans l'unité de la constitution des trois corps agissants, pour ceux qui croient aux actions directes à distance, et dans l'unité du mi-

lieu qui les transmet et du mode de transmission, pour ceux qui attribuent ces actions apparentes à l'éther où les corps sont plongés.

§ VI. — Sur un cas d'équilibre qui, adjoint a ceux du Mémoire précédent, démontre l'existence des pôles d'un élément magnétique.

Si cet équilibre ne démontrait rien de plus, l'existence des pôles et les lois de Coulomb seraient admises ici comme principes expérimentaux. Mais il suffira pour déterminer le potentiel d'un élément magnétique, et l'une des deux relations qu'il s'agit d'établir entre les coefficients des cinq actions mécaniques étudiées dans ce Mémoire. Il faudra toutefois qu'on lui adjoigne les trois cas d'équilibre démontrant les quatre principes **21**, **23**, **24** et **25**. Il peut s'énoncer, sous forme abstraite, de la manière suivante.

122. *Cinquième principe expérimental.* — Les centres de gravité d'un courant fermé et d'un aimant infiniment petits, étant placés successivement en un même point O, lorsqu'un système extérieur M' a fait prendre à ces deux corps, mobiles autour de la verticale Oz, qui les traverse suivant des droites arbitraires, des positions d'équilibre stable, aucune modification de M' ne peut troubler l'équilibre de l'un, sans troubler celui de l'autre, ni rendre l'un astatique, sans que l'autre le devienne en même temps.

Quand on aura trouvé un courant fermé et un aimant vérifiant la propriété énoncée avec une précision nécessairement limitée par les variations du magnétisme terrestre, dans l'intervalle des deux équilibres, on en conclura que cette propriété subsisterait *a fortiori*, si les deux corps, restant semblables à eux-mêmes, devenaient infiniment petits.

Or il est nécessaire, pour qu'un courant circulaire s'oriente bien, que le rayon en soit suffisamment grand, le moment du couple qui tend à le ramener à sa position d'équilibre, dans un champ de force uniforme, étant proportionnel au carré de ce rayon. Mais on peut trouver un système de courants circulaires, de dimensions suffisantes, et qui satis-

fasse à la condition demandée, c'est-à-dire dont l'axe s'oriente sensiblement comme celui d'un courant fermé infiniment petit. Une bobine sphérique y satisferait rigoureusement; et, comme la construction précise de cet instrument offrirait des difficultés, on peut employer des systèmes de bobines, construits pour d'autres usages, constituant des bobines sphériques approchées, et réalisant la condition demandée avec toute la précision désirable. Le plus simple de ces systèmes est la boussole des tangentes de M. Gaugain, modifiée par M. Helmholtz : elle se compose de deux bobines coniques égales, formant les deux nappes d'un même cône de révolution, dont le rayon est égal à la hauteur. On verra qu'une simple bobine, d'un seul rang de fil, offrirait au moins la même précision, si elle formait un cylindre ayant pour diamètre et pour hauteur la base et la hauteur d'un triangle équilatéral. En réduisant le système agissant à un élément de solénoïde, ayant son axe dans le plan horizontal mené par le point O, et plaçant ce courant à une distance de cinq diamètres, on verra (351) que l'azimut de l'axe de la bobine, mobile autour de la verticale qui passe par le milieu de cet axe, serait en équilibre stable dans une position faisant en ce point, avec le plan vertical mené par la force directrice du système agissant, un angle dont le maximum est de 5″, 318; que l'azimut de l'axe d'une aiguille aimantée, ayant ensuite son centre de gravité placé au même point, et mobile autour de la même verticale, ferait avec celui de la même force directrice un angle également très petit, et du même ordre de grandeur que le premier, si la longueur magnétique de l'aiguille était environ $\frac{1}{10}$ du diamètre de la bobine. On verra aussi qu'on obtiendrait la même approximation avec une bobine creuse de rayons

$$U = \rho(1 + e) \quad \text{et} \quad u = \rho(1 - e),$$

et de hauteur

$$(145) \quad \left\{ \begin{aligned} 2h &= \sqrt{1,8}\sqrt{\frac{U^5 - u^5}{U^3 - u^3}} \\ &= \rho\sqrt{3}\,(1 + 0,83333\ldots e^2 - 0,525e^4 + 0,4967592592\ldots e^6 + \ldots). \end{aligned} \right.$$

Pour $\rho = 50^{cm}$ et $e = 0,1$, on trouve

$$(146) \qquad U = 5^{cm},5, \quad u = 4^{cm},5, \quad 2h = 8^{cm},731972\ldots$$

En adoptant ces dimensions, construisant une bobine avec un fil assez fin pour offrir, par ses extrémités, une suspension bifilaire, prenant une aiguille aimantée de 1^{cm} de longueur, fixant un petit miroir à chacun de ces corps, et plaçant tous les points du système agissant à 1^{m} au moins, on vérifierait la première partie du principe **122** à une fraction de seconde près, si les variations du magnétisme terrestre n'étaient pas beaucoup plus grandes. La seconde se démontrerait, sachant par expérience que les petites oscillations de l'aimant sont isochrones, comme celles de la bobine le sont (n° **102**), en observant qu'aucune modification du système agissant ne change le rapport des durées des oscillations des deux appareils, corrigées des effets de l'induction et des couples de torsion des fils de suspension; d'où l'on conclurait que ces durées deviennent infinies en même temps.

123. *Sixième principe expérimental.* — Quand un aimant permanent est brisé, le plus petit fragment sur lequel on puisse expérimenter jouit de toutes les propriétés renfermées dans les cinq principes expérimentaux déjà invoqués (nos **21**, **23**, **24**, **25** et **122**).

124. *Définition d'un élément magnétique.* — Si les fragments d'un aimant sont aussi petits que la constitution de ce corps permet de les concevoir, sans qu'ils cessent de jouir de toutes ces propriétés, chacun d'eux K est un *élément magnétique*. Cette définition ne renferme aucune hypothèse : elle laisse indéterminée une limite que l'expérience n'a pas fait connaître.

Soient

$$(147)\qquad k,\ \mathrm{I},\ \lambda\quad \text{et}\quad \mathrm{k} = \mathrm{I}\lambda$$

un élément de solénoïde, son intensité, son aire et son moment;

$$(147')\qquad \mathrm{O},\ \mathfrak{L}\quad \text{et}\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

son centre, son axe et les cosinus directeurs de cet axe;

$$(147'')\qquad M$$

le système extérieur agissant, susceptible de comprendre tous les corps qui produisent des forces observables sur les courants;

$$(147''') \qquad \text{D} \quad \text{et} \quad \text{A, B, C}$$

la force directrice de M' au point O et ses composantes.

L'action de M' sur k a pour moments (56) par rapport aux axes

$$(148) \qquad \begin{cases} (M', k)_{yz} = \text{k}(\beta\text{C} - \gamma\text{B}), \\ (M', k)_{zx} = \text{k}(\gamma\text{A} - \alpha\text{C}), \\ (M', k)_{xy} = \text{k}(\alpha\text{B} - \beta\text{A}). \end{cases}$$

Posant (*fig.* 9)

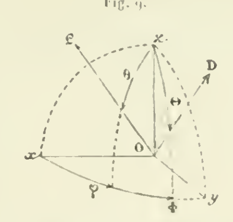
$$(149) \qquad \begin{cases} \alpha = \sin\vartheta\cos\varphi, & \beta = \sin\vartheta\sin\varphi, & \gamma = \cos\vartheta; \\ \text{A} = \text{D}\sin\Theta\cos\Phi, & \text{B} = \text{D}\sin\Theta\sin\Phi, & \text{C} = \text{D}\cos\Theta, \end{cases}$$

et substituant dans la dernière équation (10), on trouve

$$(148') \qquad (M', k)_{xy} = \text{k}\sin\vartheta\,\text{D}\sin\Theta\sin(\Phi - \varphi),$$

équation qui fait voir, par le signe de son second membre, que, si l'élément k de solénoïde est assujetti à tourner autour de l'axe des z,

Fig. 9.



l'action de M' tendra à diminuer la valeur absolue de l'angle $\Phi - \varphi$. Donc, dans le cas général où k et D sont tous deux différents de zéro, et k mobile autour d'un axe fixe Oz, mené par son centre de gravité O :

125. Pour que k soit en équilibre, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan de l'angle $(\mathfrak{L}, D)$.

126. Pour que k ne soit pas en équilibre, il faut et il suffit que Oz soit en dehors de ce plan.

127. Pour que k soit en équilibre stable, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan et en dehors de l'angle $(\mathfrak{L}, D)$.

128. Pour que k soit en équilibre instable, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan et à l'intérieur de l'angle $(\mathfrak{L}, D)$.

129. Pour que k soit astatique, il faut et il suffit que Oz soit sur un côté de l'angle $(\mathfrak{L}, D)$.

En prenant pour plan des xy celui de l'angle $(\mathfrak{L}, D)$, et faisant $\gamma = 0$, $C = 0$ dans les deux premières équations (148), par suite, $\theta = \Theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (148′), on trouve

$$(148'') \quad (M'k)_{yz} = 0, \quad (M', k)_{zx} = 0, \quad (M', k)_{xy} = \mathrm{k}D \sin(\Phi - \varphi).$$

Ainsi, l'action de M' sur k se réduit à une force appliquée au centre de gravité de k et à un couple, dont le plan passe par $\mathfrak{L}$ et par D, qui tend à diminuer l'angle de ces deux directions, et dont le moment est proportionnel au sinus de cet angle. Donc :

130. Lorsque k est assujetti uniquement à avoir son centre de gravité fixé en O, son axe $\mathfrak{L}$ n'a qu'une position d'équilibre stable coïncidant avec D; et, dans cette position, k serait en équilibre stable, s'il était assujetti a tourner autour d'un axe mené arbitrairement par le point O, excepté son axe $\mathfrak{L}$, par rapport auquel il serait astatique.

131. *Définition*. — Un systeme rigide, dans une position donnée, sera dit *en équilibre stable par rapport au point* O, qui en fait partie, lorsqu'il est en équilibre stable, quand on l'assujettit à tourner autour de tout axe mené par ce point, sauf un ou plusieurs axes exceptionnels, par rapport auxquels il peut être astatique; et la propriété **130** donne lieu à l'énoncé suivant.

132. Pour qu'un élément k de solénoïde soit en équilibre stable par rapport à son centre de gravité O, il faut et il suffit que son axe g coïncide, en direction et sens, avec la force directrice D, en ce point, du système agissant M'.

Ces propriétés et le principe **122** conduisent à l'énoncé suivant :

133. *Toutes les surfaces de niveau d'un élément magnétique K ont un axe commun de révolution, qui passe par cet élément.* On le verra au moyen des quatre lemmes suivants :

134. *Lemme.* — Si la force directrice D du système M', au centre de gravité O d'un élément magnétique K, est dirigée suivant la verticale Oz, K sera astatique par rapport à Oz.

Car, en déplaçant un corps du système agissant M', de manière que D devienne oblique, on pourra toujours obtenir un système M'', sous l'action duquel K ne soit plus astatique : sinon, le lemme est évidemment démontré par la continuité. Mais alors, en présence de M'', l'élément k de solénoïde, assujetti à tourner autour de la verticale de son centre de gravité placé en O, ne sera pas astatique, pourvu qu'on évite le cas particulier **129**, et le deviendra, si M'' reprend la position M'. Donc (n° **122**) K le deviendra en même temps. C. Q. F. D.

135. *Corollaire.* — En adjoignant au magnétisme terrestre un courant dont la force directrice, composée avec celle de la Terre, donne au point O une résultante verticale, on obtient un système M_0, sous l'action duquel K est astatique par rapport à la verticale de son centre de gravité placé en O.

136. *Lemme.* — S'il était possible d'empêcher le magnétisme terrestre d'agir sur l'élément magnétique K, celui-ci serait astatique par rapport à son axe dirigé suivant la force directrice D, au point O, du système $\mathfrak{M}'$ de tous les corps agissant sur lui.

Car, en prenant O pour origine et D pour axe des z, fixant aux axes le système $\mathfrak{M}'$ et les points de l'élément magnétique K placés sur Oz, et faisant tourner le système comme s'il était rigide, de manière que Oz devienne vertical, on ne change rien à l'action de $\mathfrak{M}'$ sur K, qui ne de-

pend que des positions relatives. Si l'on fait ensuite intervenir l'action du système M_0 (n° **155**), dont la force directrice est verticale, celle de $\mathfrak{M}'$ l'étant devenue, celle du système résultant le sera aussi. Donc K est astatique (n° **154**) relativement à Oz, sous l'action de ce système total, comme sous celle du système partiel M_0, et par suite sous celle de $\mathfrak{M}'$. C. Q. F. D.

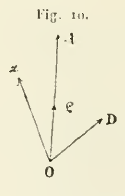
157. *Lemme*. — Le principe **122** aurait encore lieu, s'il était possible d'empêcher le magnétisme terrestre de faire partie du système agissant $\mathfrak{M}'$, et si l'axe de rotation Oz avait une direction quelconque.

Car on ne change rien aux actions mutuelles, par suite aux positions relatives d'équilibre, ni à la nature des équilibres, en faisant les deux transformations du lemme précédent, dont la première rend Oz vertical, et dont la seconde introduit et neutralise, par rapport à Oz, l'action magnétique de la Terre; et l'on est ramené aux conditions expérimentales du n° **122**; ce qui démontre le lemme **157**.

158. *Lemme*. — Étant donné un système $\mathfrak{M}'$, dont le magnétisme terrestre ne fait pas partie, et l'action qu'il exerce sur l'élément magnétique K étant représentée par une force, appliquée au centre de gravité O de K, et par un couple, il existe dans cet élément une droite $\mathcal{A}$, solidaire avec lui, issue du point O, indépendante de $\mathfrak{M}'$, et toujours comprise dans le plan du couple.

En effet, en vertu de l'équation (31), l'élément magnétique K, s'il était sollicité uniquement par un élément k' de solénoïde, aurait au moins une position d'équilibre stable par rapport à son centre de gravité fixé en O : c'est celle qui répond à la plus petite valeur, compa-

Fig. 10.



tible avec la fixité de ce point, de l'énergie $W_{k',K}$. Soit $\mathcal{A}$ (*fig.* 10) la droite, liée invariablement à K, qui coïnciderait alors, en direction et

sens, avec la force directrice de k' au point O. Le corps K étant considéré dans cette position fixe, soient D la force directrice de $\mathfrak{M}'$ au point O et Oz un axe quelconque, mené dans le plan et en dehors de l'angle (D, $\mathcal{A}$). Un élément k de solénoïde, qui aurait son centre de gravité fixé en O, et son axe $\mathcal{L}$ dirigé suivant $\mathcal{A}$, serait (n° **130**) en équilibre stable, par rapport à Oz, sous l'action de k' et (n° **127**) sous celle de $\mathfrak{M}'$. Donc K, étant, par hypothèse, en équilibre stable par rapport à Oz sous l'action de k', y sera encore (n° **137**) sous celle de $\mathfrak{M}'$. Donc le plan du couple de l'énoncé **138** passe par Oz. Mais cet axe est arbitraire dans le plan (D, $\mathcal{A}$); donc le couple est dans ce plan, lequel passe par la droite $\mathcal{A}$, quel que soit $\mathfrak{M}'$. C. Q. F. D.

139. *Définition*. — La droite $\mathcal{A}$ est appelée l'*axe magnétique* de l'élément K. Lorsqu'elle coïncide, en direction et sens, avec la force directrice de k', au centre de gravité O de l'élément K, celui-ci est en équilibre stable, par rapport au point O, sous l'action de k'.

139'. Cette propriété sera étendue (n° **176**) à la force directrice de tout système M'.

140. L'élément magnétique K est astatique par rapport à son axe, quand le magnétisme terrestre n'agit pas sur lui. Cette restriction sera écartée (**222**').

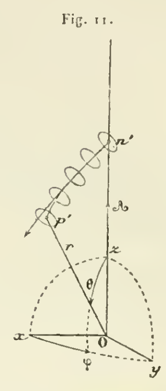
Car, si l'on fait tourner K autour de son axe $\mathcal{A}$, sous l'action de $\mathfrak{M}'$, cette action, dont le plan du couple passe toujours (n° **138**) par l'axe, ne peut développer aucun travail.

Démonstration du lemme **133**. — Si l'élément magnétique K tourne autour de son axe $\mathcal{A}$, par rapport auquel (n° **140**) il est astatique, le travail $\Delta\varepsilon(\mathfrak{M}', K)$ des actions sur K d'un système extérieur et fixe $\mathfrak{M}'$, ne comprenant pas le magnétisme terrestre, sera nul. Or, en fixant à K trois axes rectangulaires, mobiles avec ce corps, prenant son centre de gravité O pour origine, son axe $\mathcal{A}$ pour celui des z, et pour $\mathfrak{M}'$ un solénoïde fixe s' (n° **19**), dont l'axe L' va (**44**) du pôle négatif n' au pôle positif p', défini par les coordonnées (*fig.* 11)

$$x' = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y' = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z' = r\cos\theta;$$

ce travail, qu'il est permis de rapporter aux axes mobiles, sera (32) égal et de signe contraire à la variation de l'énergie $W_{K,s'}$ du système

Fig. 11.



de ces deux corps. Or l'équation (26) devient $W_{K,k'} = k' \frac{\partial V_K}{\partial \mathfrak{s}'}$, en désignant par $\mathfrak{s}'$ et k' l'axe et le moment de l'élément k' de solénoïde, qui fait partie de s', et par V_K le potentiel de l'élément magnétique K au commencement de $\mathfrak{s}'$; d'où

$$(150) \qquad W_{K,s'} = \sum W_{K,k'} = \frac{k'}{\partial \mathfrak{s}'} \int_0^{L} \frac{\partial V_K}{\partial \mathfrak{s}'} d\mathfrak{s}' = \frac{k'}{\partial \mathfrak{s}} (V_{p'} - V_{n'}),$$

$V_{p'}$ et $V_{n'}$ désignant les valeurs de V_K aux pôles p' et n'. Donc, dans la rotation de K autour de son axe $\mathcal{A}$, $V_{p'} - V_{n'}$ ne change pas; et, en plaçant sur $\mathcal{A}$ le pôle n', on voit que $V_{p'}$ est, comme $V_{n'}$, indépendant de φ, ou fonction des deux autres coordonnées r et θ seulement. Comme elles sont arbitraires, le lemme **135** est démontré.

§ VII. — Identification des potentiels d'un élément magnétique et d'un élément de solénoïde.

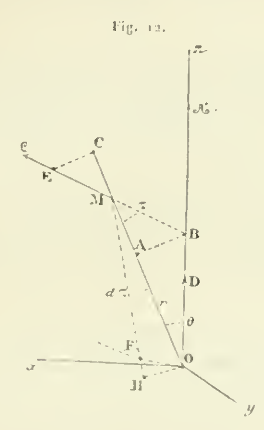
141. Soient h un élément de solénoïde placé en M (*fig.* 12), k son moment, $\mathfrak{s}$ son axe, τ le supplément BMO de l'angle $\mathfrak{s}$MO que fait

cet axe avec le rayon vecteur $r = \mathrm{MO}$, et (52)

$$\psi' = -\mathrm{k}\frac{\cos\tau}{r^2} \tag{151}$$

la partie bien définie du potentiel de k au point O, laquelle, ne dépendant que des deux coordonnées polaires r et τ, montre que les surfaces de niveau de l'élément de solénoïde sont de révolution autour de son

Fig. 12.



axe ζ; la force directrice D de ce courant, au point O, rencontre donc la direction de ζ en un point B. Soit θ l'angle BOM que fait cette force avec OM, le sens positif de cet angle étant défini par la condition qu'il soit de même signe que τ, quand il est du même côté de OM. Alors on a, dans le triangle rectangle OHF, dont l'hypoténuse OF est un élément du méridien de la surface de niveau passant par ce point,

$$\operatorname{tang}\mathrm{HOF} = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{OH}} = -\frac{dr}{r\,d\tau} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\theta = -\frac{dr}{r\,d\tau}, \tag{152}$$

et l'équation différentielle de ce méridien, tirée de l'équation (151),

$$0 = d\psi' = \frac{\mathrm{k}}{r^3}(r\sin\tau\,d\tau + 2\cos\tau\,dr). \tag{153}$$

donne

$$\tang \tau = -\frac{2\,dr}{r\,d\tau};$$

d'où, en comparant cette équation avec l'équation (152),

$$(154) \qquad \tang \tau = 2 \tang \theta.$$

Des deux directions opposées que cette formule donne pour D, une seule satisfait à la condition **45** d'être dirigée du côté où φ' décroît. Pour $\tau = 0$, l'équation (154) donne $\theta = (0 \text{ ou } \pi)$; mais la condition $d\varphi' < 0$, portée dans la seconde équation (153), dont le dernier membre devient $\frac{\mathrm{k}}{r^3}\,2\,dr$, se réduit à $dr < 0$, et lève l'ambiguïté en faisant rejeter la valeur $\theta = \pi$. Ainsi les angles θ et τ sont nuls ensemble, et leurs tangentes trigonométriques sont (154) de mêmes signes. Donc ils croissent ensemble de 0 à π.

142. Soit K' un élément magnétique ayant son centre de gravité fixé en O, et son axe $\mathcal{A}'$ dans la direction D. Il sera (nº **159**) en équilibre stable par rapport au point O, s'il est soumis uniquement à l'action de k.

142'. Soient $\mathrm{V}_{K'}$, ou simplement V, son potentiel au point M, et $\mathrm{W}_{K',k}$, ou W, l'énergie du système des deux corps K' et k.

142''. Soient Ox, Oy, Oz trois axes à gauche rectangulaires, fixés au corps K', et mobiles avec lui autour du point O; Oz étant dirigé suivant son axe $\mathcal{A}'$, et Ox dans le plan de l'angle θ.

142'''. Soit $-d\mathrm{W}$ le travail virtuel élémentaire (63) de l'action du courant fixe k sur K', tournant d'un angle infiniment petit $d\theta$ autour de Oy; travail toujours négatif, en vertu de la stabilité de l'équilibre de K'.

Les conditions pour que

(155) $$-dW = -\frac{\partial W}{\partial \theta}d\theta - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}d\theta^2 - \ldots$$

ne soit jamais positif sont, d'après la théorie des minima,

(156) $$\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0,$$

(157) $$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} > 0,$$

ou du moins que la première dérivée de W, par rapport à θ, qui ne s'annule pas, soit d'ordre pair et positive.

On a (26)

(158) $$W = k\frac{\partial V}{\partial \zeta};$$

et (n° **155**) la valeur de V au point M ne dépend que des deux coordonnées polaires r et θ. Donc

$$W = k\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\right).$$

Le triangle infiniment petit MCE, rectangle en C, donne

$$MC = ME\cos\tau, \quad EC = ME\sin\tau,$$

ou

$$dr = d\zeta\cos\tau, \quad r\,d\theta = d\zeta\sin\tau,$$

et, en substituant,

(159) $$W = k\left(\frac{\partial V}{\partial r}\cos\tau + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\tau}{r}\right).$$

Lorsqu'on fait tourner K' autour de Oy, r et τ restent fixes, et (156) devient, en y substituant successivement (159) et (154),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \theta}\cos\tau + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\frac{\sin\tau}{r} = 0,$$

(160) $$r\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \theta} + 2\,\text{tang}\,\theta\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

En posant

$$(161) \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \rho,$$

(160) devient

$$(162) \qquad r\frac{\partial \rho}{\partial r} + 2\tan\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0.$$

Cette dernière équation détermine la fonction ρ des deux variables indépendantes r et θ, et s'intègre au moyen du système auxiliaire $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{2\tan\theta} = \frac{d\rho}{0}$ ou $2\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\rho}{0}$, dont l'intégrale générale, résolue par rapport aux constantes a et b, est

$$(163) \qquad a = \rho, \quad b = \frac{\sin\theta}{r^2}.$$

L'intégrale générale de (162) est donc, $\mathfrak{F}$ désignant une fonction arbitraire,

$$(164) \qquad a = \mathfrak{F}(b) \quad \text{ou} \quad \rho = \mathfrak{F}\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right).$$

143. La fonction ρ est assujettie, outre l'équation (162), à une seconde équation différentielle, exprimant que V est le potentiel d'une surface de niveau, de révolution autour de l'axe des z (n° **135**). L'équation générale des surfaces de niveau, en fonction des coordonnées polaires r, θ, φ, est

$$(165) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

On exprime qu'elles sont de révolution autour de l'axe des z, en supprimant le terme $\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$. En dérivant (165) par rapport à θ, et substituant (161), on a la seconde équation différentielle partielle en ρ, qui va servir à déterminer $\mathfrak{F}$,

$$(166) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + r^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho}{\sin^2\theta} = 0;$$

substituant (164) dans (166), on trouve, toutes réductions faites,

$$-\frac{1}{\sin^2\theta}\mathcal{F}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\mathcal{F}'+\left(\frac{1}{r^4}+3\frac{\sin^2\theta}{r^4}\right)\mathcal{F}''=0.$$

Quand on prend

(167) $$r \quad \text{et} \quad b=\frac{\sin\theta}{r}$$

pour variables indépendantes, cette équation devient

$$-\frac{1}{b^2r^4}\mathcal{F}+\frac{1}{br^4}\mathcal{F}'+\left(\frac{1}{r^4}+3b^2\right)\mathcal{F}''=0.$$

La fonction $\mathcal{F}$ est donc assujettie à identifier, par rapport aux deux variables indépendantes (167), l'équation

$$-\frac{1}{b^2}\mathcal{F}(b)+\frac{1}{b}\mathcal{F}'(b)+\mathcal{F}''(b)+3r^4b^2\mathcal{F}''(b)=0,$$

dans laquelle r n'entre qu'explicitement, ce qui exige que $3b^2\mathcal{F}''(b)$ soit identiquement nulle; et, comme b ne peut l'être, il faut que $\mathcal{F}''(b)$ le soit; d'où

$$\mathcal{F}(b)=K-K'b,$$

K et K' désignant deux constantes arbitraires. Alors l'avant-dernière équation se réduit à $\mathcal{F}(b)=b\mathcal{F}'(b)$, et par suite à $K=0$; d'où

$$\mathcal{F}(b)=-K'b.$$

L'équation (164) devient

$$=-K'\frac{\sin\theta}{r^2},$$

et, en substituant (161),

(168) $$\frac{\partial V}{\partial\theta}=-K'\frac{\sin\theta}{r^2},$$

puis intégrant (168) de ϑ à $\frac{\pi}{2}$,

(169) $$V(r,\vartheta)=K'\frac{\cos\theta}{r^2}+V\left(r,\frac{\pi}{2}\right).$$

mais

$$(170) \qquad V\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

en vertu de l'énoncé suivant.

144. *Septième principe expérimental.* — Quand les pôles d'un aimant A', dont le magnétisme est rigide, sont intervertis par retournement, toute action observable entre ce corps et un système extérieur M', change de signe seulement.

Ce principe s'applique à l'élément magnétique K'; l'action de K' sur un élément k de solénoïde est représentée par une force appliquée à k et par un couple, dont le moment, par rapport à un axe quelconque, est une fonction linéaire et homogène (56″) des dérivées premières du potentiel $V_{K'}$. Or chacune d'elles se compose de la dérivée du premier terme (169) $K'\frac{\cos\theta}{r^2}$, dont l'inversion des pôles ne change que le signe, et de la dérivée du second terme $V\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$, qui ne change pas. Le septième principe exige que cette dernière soit nulle; donc $V\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ est indépendant de r dans tout l'espace exterieur à K'. On est convenu de donner à cette constante arbitraire la valeur zéro (170), et la fonction (169) devient, en observant d'ailleurs (n° **142″**) que l'axe $\mathcal{A}'$ est dirigé suivant Oz,

$$(171) \qquad V = K'\frac{\cos\theta}{r^2},$$

$$(171') \qquad V = K'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathcal{A}'}.$$

Cette fonction V satisfait nécessairement à la condition (156), qui a servi à la calculer. Mais elle doit encore satisfaire à la condition (157) pour que l'équilibre de K' soit stable, quand l'axe $\mathcal{A}'$ en est dirigé suivant Oz. Or l'équation (159) donne

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} = k\left(\frac{\partial^3 V}{\partial r\,\partial\theta^2}\cos\tau + \frac{\partial^3 V}{\partial\theta^3}\frac{\sin\tau}{r}\right);$$

et, en substituant (171),

$$(172)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \mathrm{k}\mathrm{K}'\frac{2\cos\tau\cos\theta + \sin\tau\sin\theta}{r^3}.$$

On peut toujours supposer, dans le plan des zx, les angles ϑ et τ compris entre 0 et π; leurs tangentes trigonométriques étant (154) de mêmes signes, ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus; par suite, $\cos\tau\cos\vartheta$ et $\sin\tau\sin\vartheta$ sont positifs; k l'est par définition. Donc (172) la condition (157) exige que K′ ne soit pas négatif. D'ailleurs K′ ne peut être nul: V le serait aussi (171), et K' ne serait point aimanté, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc K′ est positif, et dès lors la condition (157) est satisfaite.

145. Le coefficient essentiellement positif K′ du potentiel (171) est appelé le *moment magnétique* de l'élément magnétique K'.

146. Deux systèmes doués de potentiels électrodynamiques seront dits équivalents dans un espace déterminé, quand la différence de ces potentiels y sera constante.

147. Pour qu'un élément k' de solénoïde et un élément magnétique K' soient équivalents en tout point M(x, y, z) situé à des distances finies de chacun d'eux, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes centres de gravité O et O′(x', y', z'), mêmes axes g' et λ', et mêmes moments magnétiques k′ et K′.

La démonstration n'offre aucune difficulté. L'équivalence est exprimée (nº **146**) par l'équation

$$(173)\qquad V_{k'} = V_{K'}.$$

Si un élément k' de solénoïde et un élément magnétique équivalent K' agissent successivement sur un même élément k de solénoïde, de moment k, placé au point (r, ϑ), comme dans la *fig.* 12, mais ayant son axe g dirigé d'une manière quelconque, on déduit de l'équation (26)

$$(174)\qquad W_{k,k'} = \mathrm{k}\frac{\partial V_{k'}}{\partial g},$$

$$(175)\qquad W_{k,K'} = \mathrm{k}\frac{\partial V_{K'}}{\partial g};$$

substituant (52) et (171'), on a

$$(174') \qquad W_{k',k} = kk' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \, \partial \xi'},$$

$$(175') \qquad W_{K',k} = kK' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \, \partial x}.$$

On en conclut, lorsque k' et K' sont équivalents (n° **147**),

$$(176) \qquad W_{k',k} = W_{K',k}.$$

148. Un élément magnétique K' et l'élément équivalent k' de solénoïde produisent des actions identiques sur un même élément de courant $I\,ds$.

En effet, ces actions sont exprimées, l'une et l'autre, par les formules (50), qui représentent les composantes de deux forces appliquées au même élément ds, et dans lesquelles on introduit successivement les deux potentiels dont l'identité (173) démontre le principe **148.**

149. Un élément magnétique K' et l'élément équivalent k' de solénoïde produisent des actions identiques sur un même courant, fermé ou non fermé, linéaire ou à plusieurs dimensions, pourvu qu'il soit décomposable en éléments linéaires.

Car les actions de ces deux corps sur chaque élément de courant qui les reçoit sont identiques (n° **148**).

150. Les actions d'un courant fermé, fixe et permanent, $\mathfrak{C}'$, sur un élément magnétique extérieur K, et sur l'élément équivalent k de solénoïde, sont identiques.

Car elles feraient successivement équilibre, sur un même système rigide, aux deux actions, identiques entre elles (n° **149**), que produiraient K et k sur $\mathfrak{C}'$.

La première est donc exprimable par une énergie, qui n'est autre que l'énergie de la seconde,

$$(177) \qquad W_{\mathfrak{C}',K} = W_{\mathfrak{C}',k}.$$

Elle représente le travail virtuel des actions réciproques entre $\mathfrak{S}'$ et K, telles qu'elles seraient au repos dans chaque position successive, si leur distance mutuelle devenait infinie, sans altération de leurs constitutions physiques. Elle a aussi pour expression

$$(178) \qquad W_{\mathfrak{S}',K} = K\frac{\partial V_{\mathfrak{S}}}{\partial x},$$

comme cela résulte des trois identités

$$W_{\mathfrak{S}',K} = W_{\mathfrak{S}',k}, \quad W_{\mathfrak{S}',k} = k\frac{\partial V_{\mathfrak{S}}}{\partial \xi}, \quad k\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \xi} = K\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial x_0},$$

dont la première est l'équation (177), la deuxième est la relation (26), et la troisième résulte des conditions **147** d'équivalence.

§ VIII. — ACTIONS MUTUELLES DE DEUX AIMANTS.

Identification des actions produites, sur un élément magnétique K, par un élément k' de solénoïde, et par l'élément magnétique équivalent K'.

Cette identification sera la conséquence mathématique des sept principes expérimentaux déjà invoqués et du suivant. L'intervention du principe de la conservation de l'énergie, sur laquelle elle repose, est empruntée au cours de M. Maurice Lévy.

151. *Huitième principe expérimental.* — L'aimantation de l'acier trempé se conserve indéfiniment, sans aucune dépense de travail.

152. Lorsque les états magnétiques d'un aimant fixe A' et d'un aimant mobile A sont invariables, le travail virtuel des actions magnétiques de A' sur A, ramené à sa position initiale, est identiquement nul.

Sinon ces actions, sans travail moteur (n° **151**), pourraient entretenir un travail perpétuel, ce qui est contraire au principe de la conservation de l'énergie.

153. Ici encore il faut considérer les actions telles qu'elles seraient au repos, dans chaque position successive, et distinguer en outre les actions *magnétiques* des forces dues aux courants induits dans les

aimants, en vertu de leur mouvement relatif, forces dont le travail est essentiellement négatif, et qui sont exclues de ce paragraphe.

Les actions mutuelles de deux aimants, ne dépendant que de leurs positions relatives et étant de nature à se faire équilibre sur un système rigide, la somme des travaux de leurs actions mutuelles, quand tous deux sont mobiles, ne dépend que de leur mouvement relatif. En combinant ce principe avec l'énoncé **152**, on obtient le suivant.

154. Lorsque les états magnétiques de deux aimants A, A' sont invariables et qu'ils sont ramenés à leurs positions relatives initiales, la somme des travaux de leurs actions mutuelles est identiquement nulle.

Soit

$$(x, y, z, \theta, \varphi, \psi) \tag{179}$$

un système quelconque de six variables indépendantes, définissant la position de A par rapport à trois axes rectangulaires fixés à A' : la somme ϖ des travaux virtuels des actions mutuelles de ces aimants, lorsqu'ils passent, sans variation magnétique, d'une position relative $(x_0, y_0, \ldots)$ à une autre $(x, y, \ldots)$, est une fonction bien déterminée de ces deux systèmes de coordonnées, indépendante des positions intermédiaires :

$$\varpi = f(x, x_0; y, y_0, \ldots). \tag{180}$$

Car soit ϖ' la somme des travaux virtuels des actions mutuelles des deux aimants, ramenés de la position $(x, y, \ldots)$ à la position $(x_0, y_0, \ldots)$. L'énoncé **154** équivaut à l'identité $\varpi + \varpi' = 0$, qui doit subsister, de quelque manière qu'on modifie les positions intermédiaires du premier mouvement, sans changer celles du second. Donc alors, ϖ' étant le même, ϖ reste invariable. C. Q. F. D.

155. On appelle *énergie de l'action mutuelle* de deux aimants A, A', dont les états magnétiques sont invariables, la fonction (180) changée de signe

$$W_{A',A} = W(x, y, z, \theta, \varphi, \psi) = -f(x, x_0, y, y_0, \ldots), \tag{181}$$

et l'on a identiquement, par définition,

$$W(x_0, y_0, z_0, \theta_0, \varphi_0, \psi_0) = 0. \tag{182}$$

Si les deux aimants passent, sans variation magnétique, de la position relative $(x, y, \ldots)$ à une autre $(x_1, y_1, \ldots)$, on aura, pour la somme des travaux virtuels des actions mutuelles de ces deux corps, transportés

de la position $(x_0, y_0, \ldots)$ à la position $(x, y, \ldots)$ $\quad \mathfrak{T} = W(x, y, \ldots)$,

» $\quad (x_0, y_0, \ldots) \quad$ » $\quad (x_1, y_1, \ldots) \quad \mathfrak{T} + \Delta\mathfrak{T} = W(x_1, y_1, \ldots)$,

» $\quad (x, y, \ldots) \quad$ » $\quad (x_1, y_1, \ldots) \quad \Delta\mathfrak{T} = W(x, y, \ldots) - W(x_1, y_1, \ldots)$,

ou

$$(183) \qquad \Delta\mathfrak{T} = -\Delta W;$$

ce qui donne, pour la somme des travaux virtuels élémentaires des actions mutuelles,

$$(184) \qquad d\mathfrak{T} = -dW = -\frac{\partial W}{\partial x}dx - \frac{\partial W}{\partial y}dy - \ldots$$

Soit $\mathfrak{M}'$ le système d'un élément k' de solénoïde et d'un élément

Fig. 13.



magnétique K', fixes dans l'espace, invariables dans leurs constitutions physiques, ayant même centre de gravité $O'(x', y', z')$ (*fig.* 13), mêmes moments k', K', et leurs axes $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{A}'$ dans le prolongement l'un de l'autre. Soient k et K un second élément de solénoïde et un second éle-

ment magnétique, rigides, invariables dans leurs constitutions physiques, et dont les centres de gravité sont placés successivement en un même point O(x, y, z); k et K leurs moments, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ leurs axes, et r la distance OO′. Les actions de k' et de K' sur k étant représentées par les énergies (174′) et (175′), l'action de $\mathfrak{M}'$ sur k le sera par une certaine énergie égale à la somme des deux premières, c'est-à-dire sera nulle. Donc, sous l'action seule de $\mathfrak{M}'$, k est astatique par rapport à tout axe mené par le point O; et K (nº **157**) l'est aussi. Chacune des actions de k' (26) et de K' (181) sur K étant exprimable par une énergie, celle de $\mathfrak{M}'$ l'est aussi par une certaine énergie

$$W_{\mathfrak{M}', K} = f(x, y, z, \theta, \varphi, \psi);$$

les trois angles θ, φ, ψ, convenablement choisis, définissant l'orientation de K par rapport à $\mathfrak{M}'$, et formant avec x, y, z un système de six variables indépendantes, qui déterminent la position relative de ces deux corps rigides. Le travail virtuel élémentaire de l'action de $\mathfrak{M}'$ sur K, par rapport aux axes fixés à $\mathfrak{M}'$, est $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \ldots$; et l'on vient de voir que ce travail est identiquement nul avec dx, dy et dz : dès lors $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$, ce qui exprime que la fonction f est indépendante de θ, φ, ψ; on a donc

$$W_{\mathfrak{M}', K} = f(x, y, z), \quad d\varpi = -\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy - \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Par suite, $\mathfrak{M}'$ ne peut produire sur K qu'une force unique, appliquée au point O, et dont les composantes $-\frac{\partial f}{\partial x}$, $-\frac{\partial f}{\partial y}$, $-\frac{\partial f}{\partial z}$ sont indépendantes de l'orientation de K. En vertu du septième principe (nº **144**), cette force est nulle; donc $\mathfrak{M}'$ n'agit point sur K. Si donc, $\mathfrak{M}'$ restant fixe, K est transporté à l'infini, la somme des travaux $W_{K', K}$ et (175′)

$$(185) \qquad W_{k, K} = \mathrm{K}\mathrm{k}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \mathcal{A}\, \partial \mathcal{L}'}.$$

des actions de K' et de k' sur K, sera nulle; d'où, en remplaçant k' par son égal K', et $\frac{\partial}{\partial \xi'}$ par $-\frac{\partial}{\partial x}$,

$$W_{K',K} = KK' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial x}. \tag{186}$$

D'ailleurs (171'), on a pour expression du potentiel de K' au point O

$$V_{K'} = K' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

ce qui permet d'écrire (186) sous la première des deux formes

$$W_{K',K} = K \frac{\partial V_{K'}}{\partial x} = K' \frac{\partial V_K}{\partial x}. \tag{186'}$$

156. Un élément magnétique K' produit des actions identiques sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde.

Car les actions de K' sur K et sur k sont représentées par les énergies (186) et

$$W_{K',k} = kK \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \, \partial x}; \tag{187} \qquad (175')$$

et ces énergies sont identiques en vertu des conditions **147**, qu'on suppose satisfaites.

Assimilation du potentiel d'un aimant à celui d'un système d'éléments de solénoïdes.

157. *Neuvième principe.* — Avant la rupture d'un aimant, les parties jouissaient de toutes les propriétés des aimants, précédemment invoquées, mais constatées par l'expérience après la séparation seulement.

Ce postulatum, qui ne paraît pas avoir été contesté, mais qui pourrait l'être, conduit immédiatement à la propriété suivante.

158. Un aimant A' est un système d'éléments magnétiques K'.

Il en résulte (183) que le potentiel d'un aimant a pour expression

$$V_{A'} = \Sigma V_{K'}; \tag{188}$$

et la constante arbitraire, qui s'ajoute au second membre, est nulle par définition (170) ; ce qui revient à convenir que ce potentiel est infiniment petit à l'infini.

L'énergie $W_{A',K}$ des actions magnétiques mutuelles d'un aimant A' et d'un élément magnétique K, donés l'un et l'autre d'une aimantation rigide, est la somme des énergies des systèmes que les éléments magnétiques K' de l'aimant forment avec K. Le moment et l'axe de K étant K et Λ, on a (186') $\sum \mathrm{K} \frac{\partial V_{K'}}{\partial \Lambda}$ ou $\mathrm{K} \frac{\partial \sum V_{K'}}{\partial \Lambda}$ pour expression de $W_{A',K}$; et en substituant (188), puis récrivant (26),

$$W_{A',K} = \mathrm{K} \frac{\partial V_{A'}}{\partial \Lambda}, \tag{189}$$

$$W_{A',k} = \mathrm{k} \frac{\partial V_{A'}}{\partial \lambda}. \tag{190}$$

On voit, soit par la comparaison de ces formules, soit par le principe **156**, que $W_{A',K}$ et $W_{A',k}$ sont identiques, si K et k sont équivalents. Donc :

159. Les actions d'un aimant A' sur un élément magnétique K, et sur l'élément équivalent k de solénoïde, sont identiques.

160. Par définition, le *système d'éléments de solénoïdes équivalent à un aimant* donné sera le système des éléments de solénoïdes équivalents aux éléments magnétiques constitutifs de l'aimant. Cette définition est conforme à la définition **146**, en vertu du principe suivant :

161. Le potentiel d'un aimant est identique à la partie bien définie du potentiel du système équivalent d'éléments de solénoïdes.

Cela résulte immédiatement des équations (188) et (173).

162. Un aimant et le système équivalent d'éléments de solénoïdes produisent des actions identiques sur un même courant extérieur,

fermé ou non fermé, linéaire ou à plusieurs dimensions, pourvu qu'il soit décomposable en éléments linéaires.

On le voit par les principes **158** et **149**.

163. Les actions mutuelles de deux éléments magnétiques K, K', et celles des deux éléments équivalents k, k' de solénoïdes, sont identiques.

Car elles sont identiques à celles de k et K' (nos **156** et **149**).

Les énergies correspondantes sont dès lors identiques

$$(191) \qquad W_{K,K'} = W_{k,k'}.$$

163'. Les actions mutuelles de deux aimants A, A' et celles des deux systèmes équivalents $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ d'éléments de solénoïdes sont identiques.

Car la relation (191) donne, par une double sommation,

$$(192) \qquad W_{A,A'} = W_{\mathfrak{S},\mathfrak{S}'}.$$

164. L'*axe* et le *moment magnétiques* d'un aimant seront définis l'axe et le moment du système équivalent d'éléments de solénoïdes, définis eux-mêmes (no **98**).

Expressions, en fonction des potentiels des trois composantes de l'aimantation, du potentiel $V_{A'}$ d'un aimant A', en un point extérieur (x, y, z), et de l'énergie $W_{A',\mathfrak{S}}$ des actions mutuelles d'un courant fermé permanent $\mathfrak{S}$ et de l'aimant A', considéré dans un état magnétique donné.

Pour appliquer (188), soient x', y', z' les coordonnées de l'élément magnétique K', K' son moment magnétique, et A' son axe. On peut mettre son potentiel (171) sous la forme

$$(193) \quad V_{K'} = \mathrm{K}'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}\frac{dx'}{dA'} + \dots\right) = \mathrm{K}'\left(\frac{dx'}{dA'}\frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \frac{dy'}{dA'}\frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + \frac{dz'}{dA'}\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right).$$

Soit

$$(194) \qquad d\varpi'$$

un élément du volume ϖ' de l'aimant, comprenant un grand nombre

d'éléments magnétiques, auxquels s'étendra le signe Σ, et terminé par une surface qui n'en traverse aucun. On aura

$$(195)\quad V_{A'} = -\iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left[K'\left(\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{X}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial \mathcal{X}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial \mathcal{X}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]}{d\varpi'}\, d\varpi'$$

ou

$$(196)\quad V_A = -\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

en posant

$$(197)\quad \begin{cases} \xi = \displaystyle\iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'}\, d\varpi', \\ \eta = \displaystyle\iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial y'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'}\, d\varpi', \quad \zeta = \displaystyle\iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial z'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'}\, d\varpi'; \end{cases}$$

et en définissant l'*intensité* Φ' *de l'aimantation*, au point (x', y', z'), la quantité essentiellement positive définie en grandeur, direction et sens, par ses *composantes*

$$(198)\quad \alpha'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'}, \quad \beta'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial y'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'}, \quad \gamma'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial z'}{\partial \mathcal{X}'}\right)}{d\varpi'},$$

on aura

$$(199)\quad \xi = \iiint_{\varpi'} \frac{\alpha'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \eta = \iiint_{\varpi'} \frac{\beta'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \zeta = \iiint_{\varpi'} \frac{\gamma'\Phi'}{r}\, d\varpi',$$

expressions qu'on peut appeler les *potentiels des trois composantes de l'aimantation*.

On déduit de **162** une expression de l'énergie $W_{A',\mathcal{C}}$ de l'action d'un aimant A' sur un courant linéaire extérieur $\mathcal{C}$, fermé et d'intensité I constante. En récrivant des notations déjà employées, soient

$$(200)\quad x',\ y',\ z',\ K' \text{ et } \mathcal{X}'$$

les coordonnées, le moment et l'axe de son élément magnétique K';

(201) $$S',\ I',\ \lambda',\ k' = I'\lambda',\ K' \quad \text{et} \quad \mathcal{L}' \quad \text{ou} \quad \lambda'$$

la longueur, l'intensité, l'aire, le moment et l'axe de l'élément équivalent k' de solénoïde. On a (117 et 118), pour les *potentiels des trois composantes des courants*,

(202) $$\left\{\begin{aligned} F &= \iiint_{\varpi'} \frac{\sum I \int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\,ds}{d\varpi'}\,d\varpi', \\ G &= \iiint_{\varpi'} \frac{\sum I \int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial s}\,ds}{d\varpi}\,d\varpi', \\ H &= \iiint_{\varpi'} \frac{\sum I \int_0^S \frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s}\,ds'}{d\varpi'}\,d\varpi'; \end{aligned}\right.$$

et, pour l'énergie demandée,

(203) $$W_{I,\mathfrak{C}} = -I\int_0^S \left(F\frac{\partial x}{\partial s} + G\frac{\partial y}{\partial s} + H\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds.$$

L'identité (7), appliquée à la première équation (202), donne, en vertu de (201),

$$F = \iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left[k'\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \frac{\partial z}{\partial \lambda'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\right)\right]}{d\varpi}\,d\varpi$$

$$= \iiint_{\varpi'} \frac{\sum\left[k\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]}{d\varpi}\,d\varpi'$$

$$= \frac{\partial \iiint_{\varpi} \frac{\left[\frac{\sum\left(k\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)}{d\varpi}\right]}{r}\,d\varpi}{\partial y} - \frac{\partial \iiint_{\varpi} \frac{\left[\frac{\sum\left(k\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{d\varpi'}\right]}{r}\,d\varpi}{\partial z};$$

et, en substituant successivement (198) et (199), on trouve la première des trois équations

$$(204)\qquad F = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad G = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad H = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Elles satisfont à l'identité

$$(205)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Les équations (23) donnent, pour les composantes A, B, C de la force directrice D de l'aimant, au point (x, y, z),

$$(206)\qquad A = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial z};$$

et la première formule (199) donnant $\Delta_2 \xi = \int\int\int \alpha' \Phi' \Delta_2\left(\frac{1}{r}\right) d\varpi' = 0$, on déduit de (196)

$$A = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial z} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z};$$

et l'on retrouve ainsi la première des trois équations (111)

$$(207)\qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

§ IX. — Actions du magnétisme terrestre sur les courants et les aimants.

Identification des actions du magnétisme terrestre sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde.

Pour établir cette identification sur des données purement expérimentales, il faut invoquer trois nouveaux principes.

165. *Dixième principe expérimental.* — Les centres de gravité d'un élément k de solénoïde, et d'un élément magnétique K, étant placés l'un après l'autre en un même point O, ces deux corps, assujettis successivement à tourner autour de la verticale fixe Oz, et de l'horizontale fixe et arbitraire Ox, sollicités d'ailleurs uniquement par un même courant fermé $\mathcal{E}'$ et par le magnétisme terrestre T, ne deviennent jamais astatiques l'un sans l'autre.

166. *Onzième principe expérimental.* — En chaque point d'une enceinte éloignée de toute substance magnétique, les directions de l'aiguille de déclinaison sont sensiblement parallèles entre elles, ainsi que les directions de l'aiguille d'inclinaison.

167. *Douzième principe expérimental.* — Le magnétisme terrestre n'agit pas sur le centre de gravité d'un aimant.

168. Lemme. — *Lorsqu'aux deux potentiels* V *et* $\mathcal{V}$ *correspondent des surfaces de niveau qui ont les mêmes trajectoires orthogonales, en tous les points d'un volume donné* E, *il existe entre ces deux fonctions une équation du premier degré*

$$V = V_0 + D\mathcal{V},$$

V_0 *et* D *désignant deux constantes.*

En effet les surfaces des deux systèmes, qui passent par un même point (x, y, z) de l'espace E, ayant mêmes normales, on a

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}} = \text{une fonction } U \text{ de } x, y \text{ et } z;$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = U\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}dz\right),$$

ou

$$dV = U\,d\mathcal{V}.$$

Donc les deux potentiels, ne pouvant varier l'un sans l'autre, sont fonctions l'un de l'autre

$$(208) \qquad V = f(\mathcal{V}).$$

Mais ils sont définis par les équations

(209) $$\Delta_2 V = 0, \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

et l'on déduit de (208)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f' \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + f' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Formant pareillement $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, ajoutant membre à membre et supprimant les deux sommes nulles (209), on a

$$0 = f'' \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right].$$

Si l'accolade était nulle dans tout l'espace E, le système, dont le potentiel φ représente l'action, n'agirait en aucun point de ce volume, et n'aurait pas de surfaces de niveau à son intérieur, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, en tout point de E,

$$f''(\varphi) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(\varphi) = V_0 + D\varphi,$$

et (208) devient

(210) $$V = V_0 + D\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

169. Les travaux des actions du magnétisme terrestre T′ sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde sont identiques, lorsque leur centre commun de gravité O reste fixe, et qu'ils tournent solidairement autour de ce point.

En effet, soit M' le système du magnétisme terrestre T′ et d'un courant fermé $\mathfrak{C}'$, ayant sa force directrice en O égale et opposée à celle de T′. Si D devient nulle dans l'équation (148′), on voit que, sous l'action de M', k deviendra astatique par rapport à tout axe mené par le point O : donc K le deviendra aussi (n° **122**) par rapport à tout axe, horizontal ou vertical, mené par ce point. Les travaux des actions de M' sur chacun des deux corps mobiles autour du point O seront donc identiquement nuls :

(211) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{C}', K) + \mathfrak{F}(T', K) = 0, \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{C}', k) + \mathfrak{F}(T', k) = 0,$$

identités qui ont lieu indépendamment de toute relation entre les directions des axes, les moments et les déplacements de l'élément magnétique et de l'élément de solenoïde. Mais, étant équivalents et solidaires, ils satisfont en outre (n° **150**) à l'identité $\mathcal{T}(\mathcal{E}', K) = \mathcal{T}(\mathcal{E}', k)$; et celle-ci, adjointe aux identités (211), établit celle qu'il fallait démontrer :

$$\mathcal{T}(\mathrm{T}', K) = \mathcal{T}(\mathrm{T}', k). \tag{212}$$

170. Lorsqu'un élément magnétique K et l'élément équivalent k de solénoïde sont assujettis uniquement à avoir leurs centres de gravité fixes, et que ceux-ci sont placés successivement en un même point O, les axes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ de ces deux corps, sollicités uniquement par la Terre, oscillent l'un et l'autre autour de la force directrice du magnétisme terrestre au point O.

On l'a vu (n° **105**) pour k, sollicité par un système extérieur quelconque, dont le magnétisme terrestre peut faire partie, et qui dès lors peut se réduire au magnétisme terrestre.

Les travaux du magnétisme terrestre sur k et sur K étant (n° **169**) identiques, lorsque ces deux corps sont équivalents et qu'ils se meuvent solidairement autour du point O, sont maximum en même temps; et leurs positions d'équilibre stable, répondant à ces maxima, coïncident, ainsi que celles des axes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$: d'où résulte que l'énoncé **170**, démontré pour k, est vrai pour K.

171. *Potentiel local du magnétisme terrestre dans une enceinte* E. Le principe expérimental **166**, se vérifiant indépendamment des dimensions de l'aiguille aimantée, s'applique à un élément magnétique K, placé en différents points de l'enceinte E : ce corps, s'il était mobile autour de son centre de gravité, prendrait sensiblement en tous ces points la même direction. Donc, dans cet espace, les lignes de force du magnétisme terrestre peuvent être regardées (n° **170**) comme des droites parallèles. Soient l, m, n leurs cosinus directeurs. La fonction

$$\mathrm{V} = -lx - my - nz \tag{213}$$

satisfait à l'équation de définition des potentiels $\Delta_2 \mathrm{V} = 0$, et définit un

système de surfaces de niveau ayant, dans toute l'enceinte E, les mêmes trajectoires orthogonales que celles du magnétisme terrestre. Donc, dans cet espace, le *potentiel local* du magnétisme terrestre est (n° **168**) de la forme $V = V_0 + D\varphi$ ou

$$(214) \qquad V = V_0 - D(lx + my + nz).$$

On en déduit, pour les composantes de la force directrice du magnétisme terrestre,

$$(215) \quad A = -\frac{\partial V}{\partial x} = Dl, \quad B = -\frac{\partial V}{\partial y} = Dm, \quad C = -\frac{\partial V}{\partial z} = Dn,$$

et pour cette force le coefficient D de l'équation (214). Il est positif, puisque l, m, n désignent les cosinus directeurs de la force.

172. *Action du magnétisme terrestre sur un aimant.* — L'action du magnétisme terrestre T' sur un aimant A, dont le magnétisme est rigide, placé dans l'enceinte E, est identique à celle de T' sur le système équivalent $\mathfrak{S}$ d'éléments de solénoïdes.

Il suffit de démontrer cet énoncé en réduisant A à un élément magnétique K, et $\mathfrak{S}$ à l'élément équivalent k de solénoïde. Or chacune des actions de T' sur K et sur k étant représentée par une force appliquée au centre commun de gravité O de ces deux corps et par un couple, la force est nulle pour K (n° **167**), et pour k placé dans un *champ de force uniforme* (124), c'est-à-dire dans un espace où les composantes A, B, C (215) sont indépendantes de x, y, z; et les couples, produisant (n° **169**) des travaux égaux sur les deux corps, solidaires et mobiles autour du point O, sont identiques, ce qui démontre **172**.

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther;

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Besançon.

OBJET DE CE TRAVAIL.

Pour arriver à l'explication mécanique des lois de la double réfraction, Fresnel a admis que l'éther qui pénètre un milieu pondérable, et plus particulièrement un milieu cristallisé, subit dans sa constitution des déformations parallèlement aux lignes du cristal, et que l'on peut interpréter géométriquement au moyen d'un ellipsoïde. M. Briot, dans son essai sur la théorie mathématique de la lumière, a repris cette idée et, en y appliquant le calcul, a retrouvé les lois de ces phénomènes. Il paraît donc probable que cette hypothèse est vraie, mais on peut se demander s'il ne serait pas possible de remonter plus haut et de calculer ces déformations, en s'appuyant sur cette idée simple, point de départ des travaux de Cauchy sur la lumière, à savoir que tout se passe comme si les particules matérielles étaient douées de la propriété de s'attirer ou de se repousser mutuellement par une force proportionnelle à leurs masses, fonction de leur distance et dirigée suivant la droite qui les joint. Que cette force soit une propriété inhérente à la matière ou qu'elle soit purement explicative, cela importe peu; le but de la Physique mathématique étant de ramener, par le calcul, toutes les lois de la Physique trouvées par l'expérience à une seule et même loi, ce but pourrait être considéré comme atteint, si l'application des Mathématiques réduisait la Physique à l'état actuel

de l'Astronomie, où la seule loi de Newton permet d'embrasser dans un même problème de pure Mécanique tous les mouvements des corps célestes.

Je me suis donc proposé de voir si, de la supposition d'une action à distance, il n'était pas possible de déduire l'état d'équilibre de l'éther engagé dans un milieu pondérable et d'exprimer les déformations en un point du milieu éthéré primitivement libre, en fonction des masses des particules pondérables et des distances de ce point à ces particules. J'ai été ainsi conduit à des équations aux différentielles partielles que j'intègre, et, en interprétant les résultats obtenus, je retrouve l'hypothèse de Fresnel et celle qu'a adoptée M. Briot.

Connaissant l'expression des déformations, on peut former les équations du mouvement de l'éther engagé dans un milieu pondérable d'une structure déterminée et l'on trouve ainsi, pour un milieu cubique ou isotrope, une valeur très simple de l'indice unique de réfraction. En discutant le résultat obtenu, on est conduit à cette conclusion importante, savoir :

Si dans l'éther libre les vibrations longitudinales peuvent se propager, l'éther est repoussé par le milieu pondérable, et la densité moyenne de l'éther engagé dans ce milieu est moindre que dans l'éther libre.

L'application des formules trouvées aux milieux non cubiques donne les équations du mouvement de l'éther dans ces milieux, sous la forme où M. Briot les a trouvées, et dont on déduit, comme on peut le voir dans son Ouvrage, toutes les lois principales du phénomène de la réfraction multiple. Elle donne, en outre, une relation très simple et non remarquée encore, entre les indices de réfraction et le coefficient de dilatation ou de contraction de l'éther, ce qui permet de calculer ce coefficient. On en tire la même conclusion, énoncée plus haut, pour le sens de l'action subie par l'éther.

Il n'y avait pas lieu de refaire la théorie de la double réfraction ; mais, pour confirmer les résultats déjà trouvés, j'ai cru devoir soumettre au calcul une propriété optique des cristaux biréfringents qui m'a paru intimement liée à la forme cristalline et qui, jusqu'ici, n'avait été soumise à aucune loi. Cette propriété consiste dans les différences que l'on

observe entre l'indice ordinaire et l'indice extraordinaire. Pour certains cristaux, le premier est supérieur au second; on les appelle *répulsifs* : c'est l'inverse qui se présente dans d'autres, que l'on appelle *attractifs*.

Pour les cristaux appartenant au système du prisme droit à base carrée, le calcul conduit à cette conséquence, que : *le signe de la différence des deux indices dépend seulement du signe de la différence entre le côté de la base et la hauteur*. Les données numériques, empruntées à l'Ouvrage de Dufrénoy, montrent que cette conclusion est conforme à l'observation, et que *les cristaux répulsifs sont ceux qui ont le côté de la base moindre que la hauteur*. On en déduit immédiatement que l'éther est repoussé par le milieu pondérable, si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales.

Pour les cristaux du système rhomboédrique, le calcul montre encore que : *le signe de la différence des deux indices dépend seulement du signe du cosinus de l'angle des faces du trièdre, dont le sommet est à l'une des extrémités de l'axe*. Les nombres empruntés à l'Ouvrage déjà cité montrent qu'il en est en effet ainsi, et que *les cristaux répulsifs sont ceux dont l'angle est aigu*, d'où encore la même conclusion pour l'action du milieu pondérable sur l'éther.

On la retrouve encore confirmée par un phénomène particulier que présente le spath. On sait que ce corps, sous l'influence d'une élévation de température, se dilate suivant son axe et se contracte perpendiculairement à cet axe; c'est Mitscherlich qui l'a montré le premier, et qui, par des mesures directes, a prouvé que le rhomboedre se rapprochait du cube. M. Fizeau a recherché quelles étaient les modifications que subissaient alors les propriétés optiques, et il a conclu que l'indice ordinaire décroît, tandis que l'indice extraordinaire croît, de telle sorte que la double réfraction tend à disparaître. Le calcul est pleinement d'accord avec ces observations, si l'on admet encore la conclusion à laquelle on a été conduit précédemment, et, comme on le voit, par des voies bien distinctes.

Les travaux de Cauchy sur la réflexion et la réfraction semblent impliquer la nécessité des vibrations longitudinales qui, invisibles par elles-mêmes, modifient les vibrations transversales réfléchies ou réfractées, de façon à établir l'accord entre le calcul et l'observation. Si

on en admet l'existence, il faut aussi admettre que l'éther est repoussé par la matière pondérable.

Cette conclusion est contraire à l'hypothèse de Fresnel, à savoir que *les densités moyennes de deux milieux éthérés sont inversement proportionnelles aux carrés des vitesses de propagation des vibrations transversales;* dans un autre travail, je reprendrai l'étude de la réfraction et je montrerai que cette hypothèse n'est nullement nécessaire.

I. — Équilibre de l'éther engagé dans un milieu pondérable.

Soient m la masse d'une particule d'éther, x, y, z ses coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires quelconques. Soient, de même, m_1 la masse d'une particule pondérable, x_1, y_1, z_1 ses coordonnées par rapport aux mêmes axes. Désignons par r la distance de deux particules d'éther, par r_1 la distance d'une particule d'éther à une particule pondérable, par $f(r)$ l'action mutuelle de deux particules d'éther, rapportée à l'unité de masse, et enfin par $f_1(r_1)$ l'action d'une particule pondérable sur une particule d'éther. Si l'on appelle x', y', z' les coordonnées d'une particule d'éther voisine de la première, on a

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$
$$r_1 = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2};$$

on aura les équations d'équilibre d'une particule d'éther, en écrivant que les composantes de toutes les actions exercées sur elle, suivant les trois axes, ont une somme nulle, ce qui donne

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum m \frac{f(r)}{r}(x'-x) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1}(x_1-x) = 0, \\ \sum m \frac{f(r)}{r}(y'-y) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1}(y_1-y) = 0, \\ \sum m \frac{f(r)}{r}(z'-z) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1}(z_1-z) = 0. \end{cases}$$

La somme Σ s'étend à tout le milieu éthéré et Σ_1 à tout le milieu pondérable.

Si ces dernières sommes se réduisaient à zéro, on aurait les équations d'équilibre de l'éther libre, lequel prendrait évidemment une disposition telle que tout serait semblable autour d'une particule quelconque, ce que l'on traduit analytiquement en écrivant que tout y est indépendant de la direction des axes de coordonnées. La présence des particules pondérables altère cet état d'équilibre et modifie la position de chaque particule d'éther, c'est-à-dire en affecte les coordonnées de certaines variations que nous nous proposons d'évaluer; nous les désignerons par δx, δy, δz.

Pour abréger, nous représenterons par Δx, Δy, Δz les différences $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, pour le fluide éthéré libre et isotrope. Ces différences subiront les variations

$$\begin{array}{lcl} \delta\,\Delta x & \text{ou} & \Delta\,\delta x, \\ \delta\,\Delta y & \text{ou} & \Delta\,\delta y, \\ \delta\,\Delta z & \text{ou} & \Delta\,\delta z \end{array}$$

Nous supposerons ces différences assez petites pour qu'on puisse en négliger les deuxièmes puissances; dans cette hypothèse, on aura

$$\delta r = \frac{\Delta x\,\Delta\delta x + \Delta y\,\Delta\delta y + \Delta z\,\Delta\delta z}{r},$$

et les équations d'équilibre prendront la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left[\mathrm{F}(r) + \frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta x^2\right]\Delta\,\delta x + \sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta x\,\Delta y\,\Delta\,\delta y \\ &\qquad + \sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta x\,\Delta z\,\Delta\,\delta z + \sum\nolimits_1 m_1\mathrm{F}_1(r_1)(x_1 - x) = 0, \\ &\sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta x\,\Delta y\,\Delta\,\delta x + \sum m\left[\mathrm{F}(r) + \frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta y^2\right]\Delta\,\delta y \\ &\qquad + \sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta y\,\Delta z\,\Delta\,\delta z + \sum\nolimits_1 m_1\mathrm{F}_1(r_1)(y_1 - y) = 0, \\ &\sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta x\,\Delta z\,\Delta\,\delta x + \sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\Delta y\,\Delta z\,\Delta\,\delta y \\ &\qquad + \sum m\left[\mathrm{F}(r) + \frac{\mathrm{F}'(r)}{r}\delta z^2\right]\Delta\,\delta z + \sum\nolimits_1 m_1\mathrm{F}_1(r_1)(z_1 - z) = 0. \end{aligned}\right.$$

en faisant, pour abréger,

$$F(r) = \frac{f(r)}{r}$$

et

$$F_1(r_1) = \frac{f_1(r_1)}{r_1}.$$

On a, symboliquement,

$$\Delta\,\delta x = (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1)\,\delta x,$$

et de même pour δy et δz, pourvu que dans le développement on convienne de remplacer les puissances des caractéristiques u, v, w par des indices de dérivation. Alors, si l'on pose

$$L = \sum m\left[F(r) + \frac{F'(r)}{r}\Delta x^2\right]\Delta,$$

$$P = \sum m\frac{F'(r)}{r}\Delta x\,\Delta y\,\Delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le système (2) s'écrit symboliquement

$$(3)\qquad \begin{cases} L\,\delta x + P\,\delta y + Q\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(x_1 - x) = 0, \\ P\,\delta x + M\,\delta y + R\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(y_1 - y) = 0, \\ Q\,\delta x + R\,\delta y + N\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(z_1 - z) = 0. \end{cases}$$

Cauchy a remarqué que les expressions L, P, Q, ... peuvent se déduire des deux autres, savoir :

$$G = \sum m F(r)(e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1),$$

$$H = \sum m\frac{F'(r)}{r}$$
$$\times\left[e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1 - (u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z) - \tfrac{1}{2}(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^2\right],$$

de telle sorte que

$$L = G + D^2_{u^2}H, \quad P = D^2_{uv}H, \quad \ldots,$$

les équations (3) peuvent donc s'écrire ;

$$(4)\quad\begin{cases} G\,\delta x + D^2_{u^2}H\,\delta x + D^2_{uv}H\,\delta y + D^2_{uw}H\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(x_1 - x) = 0,\\ G\,\delta y + D^2_{uv}H\,\delta x + D^2_{v^2}H\,\delta y + D^2_{vw}H\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(y_1 - y) = 0,\\ G\,\delta z + D^2_{uw}H\,\delta x + D^2_{vw}H\,\delta y + D^2_{w^2}H\,\delta z + \Sigma_1 m_1 F_1(r_1)(z_1 - z) = 0.\end{cases}$$

Les $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ étant supposés relatifs à l'éther libre et isotrope, les termes contenant des puissances impaires de ces quantités sont identiquement nuls, puisqu'ils ne doivent pas changer de valeur lorsqu'on change la direction des axes, c'est-à-dire le signe de ces termes, d'après cela, le premier terme à conserver dans G dépendra de

$$(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^2,$$

et dans H de

$$(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^4.$$

Nous négligerons pour un instant les termes qui suivent, sauf à voir plus tard l'erreur qui peut en résulter. On a alors simplement

$$G = \frac{1}{2}\sum m\,F(r)(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^2,$$

$$H = \frac{1}{2.3.4}\sum m\,\frac{F'(r)}{r}(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^4,$$

ou enfin

$$G = \frac{1}{2.3}\sum m\,F(r)\,r^2(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = \frac{1}{2.3.4.5}\sum m\,\frac{F'(r)}{r}\,r^4(u^2 + v^2 + w^2)^2.$$

Nous ferons

$$g = \frac{1}{2.3}\sum m\,F(r)\,r^2,$$

$$h = \frac{1}{2.3.5}\sum m\,F'(r)\,r^3.$$

Ces sommes se rapportent à l'éther libre, tel qu'il serait sans l'action du milieu pondérable. Alors

$$G = g(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = \frac{h}{4}(u^2 + v^2 + w^2)^2.$$

on en tire

$$D^2_{u^2}H = h(u^2+v^2+w^2) + 2hu^2,$$
$$D^2_{uv}H = 2huv,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les équations de l'équilibre deviennent

$$(5)\left\{\begin{aligned}&(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta x\\&\quad+2h(u^2\,\delta x+uv\,\delta y+uw\,\delta z)+\Sigma_1 m_1\,F_1(r_1)(x_1-x)=0,\\&(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta y\\&\quad+2h(uv\,\delta x+v^2\,\delta y+vw\,\delta z)+\Sigma_1 m_1\,F_1(r_1)(y_1-y)=0,\\&(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta z\\&\quad+2h(uw\,\delta z+vw\,\delta y+w^2\,\delta z)+\Sigma_1 m_1\,F_1(r_1)(z_1-z)=0,\end{aligned}\right.$$

équations linéaires aux différentielles partielles qu'il s'agit d'intégrer.

A cet effet, cherchons d'abord si l'on ne pourrait pas y satisfaire par une solution particulière, savoir :

$$\delta x = \Sigma_1 m_1\,\varphi(r_1)(x_1-x),$$
$$\delta y = \Sigma_1 m_1\,\varphi(r_1)(y_1-y),$$
$$\delta z = \Sigma_1 m_1\,\varphi(r_1)(z_1-z),$$

en choisissant convenablement la fonction inconnue $\varphi(r_1)$. On a alors

$$u\,\delta x = -\Sigma_1 m_1\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(x_1-x)^2 - \Sigma_1 m_1\,\varphi(r_1),$$
$$u^2\,\delta x = \Sigma_1 m_1\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]'\frac{(x_1-x)^3}{r_1} + 3\Sigma_1 m_1\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(x_1-x),$$
$$uv\,\delta x = \Sigma_1 m_1\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]'\frac{(x_1-x)^2(y_1-y)}{r_1} + \Sigma_1 m_1\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(y_1-y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

il en résulte

$$(u^2+v^2+w^2)\,\delta x = \Sigma_1 m_1\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1(x_1-x) + 5\Sigma_1 m_1\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(x_1-x),$$
$$u^2\,\delta x + uv\,\delta y + uw\,\delta z = \Sigma_1 m_1\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1(x_1-x) + 5\Sigma_1 m_1\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(x_1-x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations (5) deviennent alors

$$(6)\quad \begin{cases} \Sigma_1 m_1\left((g+3h)\left\{\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1 + 5\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right\} + \mathrm{F}_1(r_1)\right)(x_1 - x) = 0, \\ \Sigma_1 m_1\left((g+3h)\left\{\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1 + 5\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right\} + \mathrm{F}_1(r_1)\right)(y_1 - y) = 0, \\ \Sigma_1 m_1\left((g+3h)\left\{\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1 + 5\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right\} + \mathrm{F}_1(r_1)\right)(z_1 - z) = 0. \end{cases}$$

Elles sont satisfaites simultanément, si l'on choisit la fonction φ de manière à satisfaire à l'équation unique

$$(g+3h)\left\{\left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right]' r_1 + 5\frac{\varphi'(r_1)}{r_1}\right\} + \mathrm{F}_1(r_1) = 0$$

ou, en faisant, pour abréger, $\psi(r_1) = \frac{\varphi'(r_1)}{r_1}$,

$$(7)\qquad (g+3h)\left(\frac{d\psi}{dr_1} r_1 + 5\psi\right) + \mathrm{F}_1(r_1) = 0.$$

φ ayant été ainsi choisi, et δx, δy, δz étant toujours les solutions les plus générales des équations (5), faisons

$$\delta x = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x) + \delta' x,$$
$$\delta y = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y) + \delta' y,$$
$$\delta z = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z) + \delta' z,$$

$\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ étant maintenant les inconnues de la question. Elles sont déterminées par les équations

$$(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta' x + 2h(u^2\,\delta' x + uv\,\delta' y + uw\,\delta' z) = 0,$$
$$(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta' y + 2h(uv\,\delta' x + v^2\,\delta' y + vw\,\delta' z) = 0,$$
$$(g+h)(u^2+v^2+w^2)\,\delta' z + 2h(uw\,\delta' x + vw\,\delta' y + w^2\,\delta' z) = 0,$$

tirées par substitutions des équations (5). Dans l'éther libre, les solu-

tions seraient visiblement

$$\delta' x = 0, \quad \delta' y = 0, \quad \delta' z = 0.$$

Or, si l'on passe de l'éther libre à l'éther qui pénètre le milieu pondérable, les coefficients g et h ne changent pas; on en conclut que les solutions restent les mêmes, et, par suite, que les solutions trouvées sous forme de solutions particulières sont en réalité les solutions générales des équations de l'équilibre.

Elles ont une interprétation simple. Considérons les trois déplacements élémentaires

$$m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x), \quad m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y), \quad m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z),$$

que l'on peut écrire

$$m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(x_1 - x)}{r_1}, \quad m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(y_1 - y)}{r_1}, \quad m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(z_1 - z)}{r_1};$$

ce sont les composantes suivant les axes coordonnés d'un déplacement unique représenté par $m_1 \varphi(r_1) r_1$, et dirigé suivant la droite qui joint le point du milieu éthéré à une particule pondérable. Ce déplacement est, comme on voit, proportionnel à la masse de la particule pondérable et fonction de la distance à cette particule.

Le déplacement total d'une particule d'éther est, d'après la forme trouvée, la résultante des déplacements élémentaires.

Toute la question est donc ramenée à intégrer l'équation (7), ce qui ne présente aucune difficulté.

II. — Intégration.

L'équation (7) est linéaire, on en a immédiatement l'intégrale

$$\psi(r_1) = \frac{C}{r_1^3} - \frac{1}{r_1^3(g + 3h)} \int \frac{F_1(r_1)}{r_1} r_1^3 \, dr_1,$$

où C est une constante arbitraire.

Pour la déterminer, remarquons que ψ doit se réduire à zéro, lorsque

l'éther est supposé libre, c'est-à-dire lorsque l'on supprime l'action du milieu pondérable, ou enfin lorsqu'on fait $F_1(r_1) = 0$; il en résulte $C = 0$, et l'on a simplement

$$(8) \qquad \psi(r_1) = -\frac{1}{r_1^4(g+3h)}\int F_1(r_1)\, r_1^3\, dr_1.$$

La fonction $F_1(r_1)$ est généralement considérée comme étant inversement proportionnelle à une certaine puissance entière de la distance; en effet, si l'on suppose qu'il en soit ainsi, pour la force d'action de la matière pondérable sur l'éther, on a

$$f_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^n},$$

μ_1 étant une constante positive, si la force est attractive, négative dans le cas contraire; on en conclut

$$F_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n+1}}.$$

Plus généralement, on peut imaginer $f_1(r_1)$ développée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r_1}$, soit

$$f_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n_1}} + \frac{\mu'_1}{r_1^{n'_1}} + \ldots$$

et si l'on admet qu'à une petite distance, comparable au rayon de la sphère d'activité, le premier terme est prépondérant et donne son signe à $f_1(r_1)$, on pourra encore, quand on se bornera à étudier le sens des phénomènes, limiter $f_1(r_1)$ à ce premier terme; c'est ce que nous ferons.

Remplaçant donc $F_1(r_1)$ par la valeur précédemment écrite, on a

$$\int F_1(r_1)\, r_1^3\, dr_1 = \mu_1 \int \frac{dr_1}{r_1^{n_1-3}}.$$

1° Si $n_1 \neq 4$, on a

$$\mu_1 \int \frac{dr_1}{r_1^{n_1-3}} = -\frac{\mu_1}{n_1-4}\,\frac{1}{r_1^{n_1-4}}.$$

donc

$$\psi(r_1) = \frac{\mu_1}{(g+3h)(n_1-4)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}};$$

par suite,

$$\varphi'(r_1) = \frac{\mu_1}{(g+3h)(n_1-4)} \frac{1}{r_1^{n_1}},$$

ou enfin, si $n_1 \neq 1$,

$$(9) \qquad \varphi_1(r_1) = -\frac{\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}}.$$

Il en résulte

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{n_1-1}}(x_1 - x), \\ \delta y &= \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{n_1-1}}(y_1 - y), \\ dz &= \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{n_1-1}}(z_1 - z). \end{aligned} \right.$$

On a supposé n_1 différent de 1 et de 4.

2° Si $n_1 = 1$, on trouve

$$(11) \qquad \varphi = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)} \mathrm{L} r_1,$$

L désignant un logarithme népérien.

3° Si $n_1 = 4$, on trouve

$$(12) \qquad \varphi = \frac{\mu_1}{3(g+3h)} \left(\mathrm{L} r_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1^3}.$$

L'unité de longueur est arbitraire, on la supposera très grande par rapport au rayon de la sphère d'activité, de sorte que le nombre r_1 sera toujours petit.

Avant d'aller plus loin, proposons-nous d'apprécier l'erreur commise en réduisant G et H à leurs premiers termes; bornons-nous à G : le résultat serait le même pour H.

Le premier terme négligé dans G est

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m \mathrm{F}(r)(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^4$$

ou

$$\frac{1}{2.4.5} \Sigma m^2 \mathrm{F}(r) r^5 (u^2 + v^2 + w^2)^2;$$

donc, dans la première équation, par exemple dans G δx, on a négligé

$$\frac{1}{2.5}\Sigma m F(r) r^4 (u^2+v^2+w^2)^2 \delta x$$
$$= \frac{1}{2.5}\Sigma m F(r) r^4 (u^2+v^2+w^2)\left(r_1 \frac{d\psi}{dr_1} + 5\psi\right)$$

ou

$$\frac{-1}{2.5}\Sigma m F(r) r^4 (u^2+v^2+w^2)\frac{F_1(r_1)}{g+3h}$$
$$= -\frac{n_1(n_1-1)}{2.5(g+3h)}\Sigma m F(r) r^4 \Sigma_1 m_1 \frac{A_1}{r_1^{n+4}};$$

le premier terme conservé est

$$-\frac{1}{2.5(g+3h)}\Sigma m F(r) r^2 \Sigma_1 m_1 \frac{A_1}{r_1^{n+2}};$$

donc deux termes relatifs aux mêmes valeurs de r et de r_1 sont un rapport de l'ordre $\frac{r^2}{r_1^2}$.

Si l'on désigne par ε le rayon de la sphère d'activité de l'éther sur lui-même, par l la demi-distance moyenne des particules pondérables, ce rapport pour deux termes quelconques est moindre que $\frac{\varepsilon^2}{l^2}$. Dans l'idée que l'on se fait du milieu éthéré, on conçoit que chaque cellule du milieu pondérable contient un très grand nombre de particules d'éther, la distance de deux particules d'éther voisines est donc très petite par rapport à l, et si l'on admet que l'action du milieu éthéré sur une de ses particules se réduise à celle des particules très voisines, le rapport précédent sera assez petit pour que l'on puisse négliger, au moins dans une première approximation, les termes que nous avons rejetés.

III. — Interprétation.

Nous avons trouvé pour les composantes de la déformation totale

$$\begin{cases} \delta x = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x), \\ \delta y = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y), \\ \delta z = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z), \end{cases}$$

et déterminé la fonction φ; voyons maintenant comment ces formules s'accordent avec l'hypothèse de Fresnel et l'idée que M. Briot a émise sur la constitution de l'éther.

Considérons, par exemple, un milieu cristallisé dans le système du prisme droit à base rectangle; prenons pour origine le centre d'une cellule, et soient a, b, c les demi-dimensions de cette cellule : les coordonnées d'une particule pondérable quelconque seront

$$ma,\ nb,\ pc,$$

m, n, p étant des nombres entiers impairs positifs ou négatifs et pouvant prendre toutes les valeurs possibles; on a donc

$$\delta x = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} m_1(ma-x)\varphi\left[\sqrt{(ma-x)^2+(nb-y)^2+(pc-z)^2}\right].$$

Actuellement, imaginons que l'on passe d'une particule d'éther à une autre occupant dans une autre cellule une position homologue à celle de la première; le centre de cette cellule aura pour coordonnées

$$2m'a,\ 2n'b,\ 2p'c,$$

m', n', p' étant des nombres entiers déterminés. Donc il faudra remplacer

$$x,\ y,\ z$$

par

$$x+2m'a,\ y+2n'b,\ z+2p'c$$

et si l'on pose

$$m''=m-2m',\quad n''=n-2n',\quad p''=p-2p',$$

m'', n'', p'' seront encore des nombres impairs pouvant prendre toutes les valeurs possibles, et l'on aura pour la seconde particule

$$\delta x = \sum_{m''=-\infty}^{m''=+\infty} \sum_{n''=-\infty}^{n''=+\infty} \sum_{p''=-\infty}^{p''=+\infty} m_1(m''a-x) \times \varphi\left[\sqrt{(m''a-x)^2+(n''b-y)^2+(p''c-z)^2}\right].$$

qui est évidemment la même chose que pour la première. Donc δx, δy, δz reprennent, comme on devait s'y attendre, la même valeur aux points homologues des cellules cristallines : ce sont bien des fonctions périodiques de x, y, z dont les périodes sont $2a$, $2b$, $2c$. C'est sur cette considération que M. Briot a fondé la théorie mathématique de la dispersion et de la polarisation circulaire.

Si l'on considère une fonction $\varpi(r_1)$, telle que l'on ait

$$-\frac{\varpi'(r_1)}{r_1} = \varphi(r_1)$$

et que l'on forme la fonction

$$\Sigma_1 m_1 \varpi(r_1),$$

on voit que δx, δy, δz sont les dérivées partielles de cette fonction, prises respectivement par rapport à x, y, z.

Donc le déplacement d'une particule est dirigé suivant la normale à la surface représentée par l'équation

$$(13) \qquad \Sigma_1 m_1 \varpi(r_1) = \lambda,$$

λ étant choisi de façon que cette surface passe par le point considéré. C'est l'analogue des surfaces de niveau, en hydrostatique.

Pour les points voisins du centre d'une cellule, cette surface est sensiblement un ellipsoïde ou une sphère. En effet, prenons toujours pour origine le centre de cette cellule, et désignons par λ_0 la valeur que prend λ ou $\Sigma_1 m_1 \varpi(r_1)$ quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Développons λ suivant les puissances de x, y, z; on a

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_0 &+ u\lambda_0 x + v\lambda_0 y + w\lambda_0 z \\ &+ \tfrac{1}{2}(u^2\lambda_0 x^2 + v^2\lambda_0 y^2 + w^2\lambda_0 z^2 + 2uv\lambda_0 xy + 2uw\lambda_0 xz + 2vw\lambda_0 yz) + \ldots.\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

on a

$$u\lambda_0 = \Sigma_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} x_1,$$

$$v\lambda_0 = \Sigma_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} y_1,$$

$$w\lambda_0 = \Sigma_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} z_1,$$

ces quantités sont nulles dans un milieu homoédrique. Nous ferons ensuite

$$u^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{x_1^2}{\rho_1} - \Sigma_1 m_1 \varphi(\rho_1) = \text{A},$$

$$v^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{y_1^2}{\rho_1} - \Sigma_1 m_1 \varphi(\rho_1) = \text{A}',$$

$$w^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{z_1^2}{\rho_1} - \Sigma_1 m_1 \varphi(\rho_1) = \text{A}'',$$

$$vw\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{y_1 z_1}{\rho_1} = \text{B},$$

$$uw\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{x_1 z_1}{\rho_1} = \text{B}',$$

$$uv\lambda_0 \quad \text{ou} \quad -\Sigma_1 m_1 \varphi'(\rho_1)\frac{x_1 y_1}{\rho_1} = \text{B}''.$$

On a donc, en se bornant aux termes du deuxième degré en x, y, z, ce qui revient en réalité à négliger ceux du quatrième degré, car les coefficients des termes du troisième degré sont identiquement nuls :

$$\lambda = \lambda_0 + \tfrac{1}{2}(\text{A}x^2 + \text{A}'y^2 + \text{A}''z^2 + 2\text{B}yz + 2\text{B}'xz + 2\text{B}''xy),$$

et si λ' est la valeur de λ relative à un point donné du milieu fluide, l'équation (13) devient

$$\text{A}x^2 + \text{A}'y^2 + \text{A}''z^2 + 2\text{B}yz + 2\text{B}'xz + 2\text{B}''xy = 2(\lambda' - \lambda_0).$$

Dans un cristal à lignes rectangulaires, si l'on dirige les axes suivant ces trois lignes, B, B', B'' sont nuls; il en est de même dans un milieu isotrope, quelles que soient les directions des axes; dans tous les cas,

ils le deviennent si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de la surface dont on vient de trouver l'équation.

Dans le cas particulier d'un milieu cubique ou isotrope, on a

$$A = A' = A'';$$

la surface se réduit à une sphère. En tenant compte des termes d'un degré plus élevé en x, y, z à mesure que l'on s'éloigne du centre, on pourrait avoir, avec une exactitude plus grande, l'équation de la surface véritable. Mais je ne m'arrête pas à cette recherche facile.

Les axes étant dirigés suivant ceux de la surface du deuxième degré, on a

$$\delta x = A x,$$
$$\delta y = A' y,$$
$$\delta z = A'' z,$$

ce que l'on peut exprimer en disant que le milieu, dans une même cellule, a subi des contractions ou dilatations parallèlement à trois axes principaux, et telles que la variation de chacune des coordonnées est proportionnelle à sa valeur. C'est l'hypothèse de M. Briot.

IV. — Mouvement de l'éther modifié par la présence d'un milieu pondérable.

Les équations de l'équilibre étant, comme nous l'avons vu,

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma m F(r)\Delta x + \Sigma_1 m_1 f(r_1)(x_1 - x) = 0,\\ &\Sigma m F(r)\Delta y + \Sigma_1 m_1 f(r_1)(y_1 - y) = 0,\\ &\Sigma m F(r)\Delta z + \Sigma_1 m_1 f(r_1)(z_1 - z) = 0,\end{aligned}\right.$$

on obtient les équations du mouvement vibratoire en imaginant que chaque particule subisse autour de sa position moyenne un petit déplacement dont les composantes ξ, η, ζ suivant les trois axes sont assez petites pour qu'on puisse en négliger les secondes puissances, et en exprimant que les forces élastiques ainsi développées et rapportées

à l'unité de masse sont justement, suivant les trois axes, les composantes de l'accélération.

Si l'on fait toujours

$$G = \Sigma m\, F(r)\,[e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1],$$

$$H = \Sigma m \frac{F'(r)}{r}\Big[e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1 - (u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z) - \tfrac{1}{2}(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z)^2\Big]$$

et

$$L = G + D_{u}^2 H, \quad P = D_{uv}^2 H, \quad \ldots,$$

et qu'on désigne D_t la dérivée prise par rapport au temps, on aura, pour le mouvement de l'éther, en négligeant celui du milieu pondérable, ce qui est sensiblement vrai pour les milieux transparents :

$$(14)\ \left\{\begin{aligned}
&(D_t^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta + \xi\Sigma_1 m_1\Big[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1}(x_1 - x)^2\Big]\\
&\quad + \eta\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(x_1 - x)(y_1 - y) + \zeta\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(x_1 - x)(z_1 - z) = 0,\\
&(D_t^2 - M)\eta - P\zeta - R\zeta + \eta\Sigma_1 m_1\Big[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1}(y_1 - y)^2\Big]\\
&\quad + \zeta\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(y_1 - y)(z_1 - z) + \xi\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(y_1 - y)(x_1 - x) = 0,\\
&(D_t^2 - N)\zeta - Q\xi - P\eta + \zeta\Sigma_1 m_1\Big[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1}(z_1 - z)^2\Big]\\
&\quad + \xi\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(x_1 - x)(z_1 - z) + \eta\Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1}(y_1 - y)(z_1 - z) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients de cette équation ne sont pas constants, mais nous les réduirons à leurs valeurs moyennes, ce qui revient dans un milieu homoédrique à prendre leurs valeurs pour le point qui occupe le centre d'une cellule.

Pour calculer les modifications que subissent les coefficients L, M, N, P, Q, R, quand on imagine que l'on passe d'un milieu éthéré libre au milieu modifié, comme il a été dit, il suffira de faire varier

$$\Delta x, \ \Delta y, \ \Delta z$$

de

$$\delta\Delta x,\quad \delta\Delta y,\quad \delta\Delta z$$

ou

$$\Delta\delta x,\quad \Delta\delta y,\quad \Delta\delta z,$$

on a, en général et sous forme symbolique,

$$\begin{aligned}
\Delta\delta x &= (e^{u\Delta x+v\Delta y+w\Delta z}-1)\,\delta x,\\
\Delta\delta y &= (e^{u\Delta x+v\Delta y+w\Delta z}-1)\,\delta y,\\
\Delta\delta z &= (e^{u\Delta x+v\Delta y+w\Delta z}-1)\,\delta z.
\end{aligned}$$

Il suffira de conserver les termes du premier degré en Δx, Δy, Δz, et si l'on observe que, moyennant un choix convenable des axes, on peut faire que les valeurs moyennes de

$$v\,\delta x,\ u\,\delta y;\quad w\,\delta x,\ u\,\delta z;\quad v\,\delta z,\ w\,\delta y$$

soient nulles, on a

$$\begin{aligned}
\delta\Delta x &= u\,\delta x\,\Delta x,\\
\delta\Delta y &= v\,\delta y\,\Delta y,\\
\delta\Delta z &= w\,\delta z\,\Delta z;
\end{aligned}$$

donc, tout se réduit à remplacer

$$\Delta x,\quad \Delta y,\quad \Delta z$$

par

$$(1+u\,\delta x)\,\Delta x,\quad (1+v\,\delta y)\,\Delta y,\quad (1+w\,\delta z)\,\Delta z,$$

les Δx, Δy, Δz se rapportant toujours au fluide éthéré libre.

V. — Milieu cubique ou isotrope.

En dirigeant les axes de coordonnées suivant les lignes du cristal, si le milieu appartient au système cubique ou suivant trois droites rectangulaires quelconques s'il est isotrope comme le verre, les liquides,

les vapeurs, les gaz, on voit que l'on a

$$u\,\delta x = v\,\delta y = w\,\delta z = \tfrac{1}{3}(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z);$$

or

$$u\,\delta x = -\Sigma_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(x_1 - x)^2 - \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1),$$

$$v\,\delta y = -\Sigma_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(y_1 - y)^2 - \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1),$$

$$w\,\delta z = -\Sigma_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1}(z_1 - z)^2 - \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1).$$

Donc

$$u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z = -\Sigma_1 m_1 \varphi'(r_1) r_1 - 3\Sigma_1 m_1 \varphi(r_1).$$

1° Si $n_1 \neq 1$ et de 4, on a (9),

$$\varphi(r_1) = \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}},$$

$$r_1 \varphi'(r_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z &= \frac{-\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \Sigma_1 m_1 \frac{1}{r_1^{n_1-1}} \left(\frac{-3}{n_1-1} + 1\right) \\ &= \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)} \Sigma_1 m_1 \frac{1}{r_1^{n_1-1}}. \end{aligned}$$

Réduite à sa valeur moyenne, cette quantité sera

$$\frac{-\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)} \sum\nolimits_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

ρ_1 étant, comme plus haut, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Nous désignerons par $3g_1$ cette constante, et nous aurons

$$u\,\delta x = v\,\delta y = w\,\delta z = g_1.$$

2° Si $n_1 = 1$, on a (11)

$$\varphi(r_1) = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)} \mathrm{L} r_1;$$

on en conclut

$$3g_1 = \frac{\mu_1}{g+3h}\Sigma_1 m_1 \,\mathrm{L}\rho_1 - \frac{\mu_1}{g+3h}\Sigma_1 m_1.$$

On peut réduire le second membre à son premier terme, qui est très grand par rapport au second.

3° Si $n_1 = 4$, on a (12)

$$\varphi(r_1) = \frac{\mu_1}{3(g+3h)}\,\frac{1}{r_1^3}\left(\mathrm{L}r_1 + \tfrac{1}{3}\right),$$

d'où

$$3g_1 = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)}\Sigma_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^3}.$$

Dans G et H réduits à

$$\frac{1}{2}\sum m\mathrm{F}(r)(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2$$

et

$$\frac{1}{2.3.4}\sum m\frac{\mathrm{F}'(r)}{r}(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^4,$$

il faut maintenant remplacer

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$$

par

$$(1+g_1)\Delta x,\ (1+g_1)\Delta y,\ (1+g_1)\Delta z.$$

Nous ferons

$$f(r) = \frac{\mu}{r^n},$$

r se trouvera remplace par $(1+g_1)r$; donc, si l'on pose

$$g = \frac{1}{2.3}\sum\frac{m\mu}{r^{n-1}},\quad h = \frac{n-1}{2.3.5}\sum\frac{m\mu}{r^{n-3}},$$

les Σ se rapportant ici à l'éther libre, on aura simplement

$$\mathrm{G} = \frac{g}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2),$$

$$\mathrm{H} = \frac{h}{4(1+g_1)^{n-3}}(u^2+v^2+w^2)^2;$$

on en déduit immédiatement L, M, ...

Les autres coefficients ont pour valeurs moyennes

$$\sum_1 m_1\left[F_1(\rho_1)+\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}x_1^2\right],\quad \sum_1 m_1\left[F_1(\rho_1)+\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}y_1^2\right],$$
$$\sum_1 m_1\left[F_1(\rho_1)+\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}z_1^2\right],$$
$$\sum_1 m_1\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}x_1y_1,\quad \sum_1 m_1\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}x_1z_1,\quad \sum_1 m_1\frac{F'(\rho_1)}{\rho_1}y_1z_1;$$

les trois derniers sont nuls, les autres sont égaux; leur somme est

$$\sum_1 m_1[3F_1(\rho_1)+F'(\rho_1)\rho_1]\quad \text{ou}\quad -(n_1-2)\sum_1\frac{m_1\mu_1}{\rho_1^{n_1+1}}.$$

Nous la désignerons par $3l_1$; chacun des trois premiers coefficients aura donc pour valeur l_1, et les équations du mouvement deviendront

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[D_t^2-\frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2)\right]\xi-\frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2\xi+uv\eta+uw\zeta)+l_1\xi=0,\\&\left[D_t^2-\frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2)\right]\eta-\frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}}(uv\xi+v^2\eta+vw\zeta)+l_1\eta=0,\\&\left[D_t^2-\frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2)\right]\zeta-\frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}}(uw\xi+vw\eta+w^2\zeta)+l_1\zeta=0,\end{aligned}\right.$$

Les ondes planes persistantes, solutions particulières de ces équations, sont données par

$$\xi=A e^{i(ax+by+cz-st)},$$
$$\eta=B e^{i(ax+by+cz-st)},$$
$$\zeta=C e^{i(ax+by+cz-st)},$$

i étant mis pour $\sqrt{-1}$, et a, b, c étant proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde. Si l'on désigne par I la longueur d'onde, on a

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4\pi^2}{I^2},$$

et la durée d'une vibration est $\frac{2\pi}{s}$. A, B, C, a, b, c, s sont réels.

Les amplitudes A, B, C sont liées par les équations

$$(16)\quad \begin{cases} \left[s^2 - \dfrac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1\right]\mathrm{A} - \dfrac{2ha}{(1+g_1)^{n-1}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}) = 0,\\ \left[s^2 - \dfrac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1\right]\mathrm{B} - \dfrac{2hb}{(1+g_1)^{n-1}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}) = 0,\\ \left[s^2 - \dfrac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1\right]\mathrm{C} - \dfrac{2hc}{(1+g_1)^{n-1}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}) = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par a, b, c et qu'on les ajoute, on a

$$\left[s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1\right](a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C})$$
$$- \frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2)(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}) = 0;$$

de là deux manières d'y satisfaire :

1° $$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C} = 0,$$

ce qui fournit une vibration transversale non polarisée avec

$$s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1 = 0;$$

2° $$s^2 - \frac{g+3h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2+b^2+c^2) - l_1 = 0,$$

avec $\dfrac{\mathrm{A}}{a} = \dfrac{\mathrm{B}}{b} = \dfrac{\mathrm{C}}{c}$, ce qui fournit une vibration longitudinale.

La vitesse de propagation de l'onde est fournie par

$$\omega = \frac{\mathrm{S}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\mathrm{S}l}{2\pi}.$$

Donc, pour les vibrations transversales, on a

$$\omega^2 = \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 l^2}{4\pi^2}$$

et, pour les vibrations longitudinales,

$$\omega'^2 = \frac{g+3h}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2}.$$

Dans l'éther libre, g_1 et l_1 sont nuls : donc, si ω_0 et ω'_0 sont les vitesses de propagation des deux espèces de vibrations ; dans l'éther libre, on voit que

$$\omega_0^2 = g+h \quad \text{et} \quad \omega_0'^2 = g+3h;$$

les formules précédentes deviennent donc

$$\text{Vibr. transv.}\dots\dots\dots \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2},$$

$$\text{Vibr. longit.}\dots\dots\dots \quad \omega'^2 = \frac{\omega_0'^2}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2}.$$

I est la longueur, dans le milieu pondérable, de l'onde réfractée; soit I_0 la longueur de l'onde incidente, on a

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{d'où} \quad I = I_0\frac{\omega}{\omega_0};$$

donc, pour les vibrations transversales, on a

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I_0^2 \omega^2}{\omega_0^2 4\pi^2}$$

ou

$$\omega^2\left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{\omega_0^2 4\pi^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{(1+g_1)^{n-1}};$$

l'indice de réfraction ν est égal à $\frac{\omega_0}{\omega}$, donc

$$\nu^2 = (1+g_1)^{n-1}\left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{4\pi^2 \omega_0^2}\right).$$

De même, pour les vibrations longitudinales, on aura

$$\nu'^2 = (1+g_1)^{n-1}\left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{4\pi^2 \omega_0'^2}\right).$$

Les deux vibrations incidentes transversale et longitudinale qui composent un rayon de lumière naturelle ayant même durée, on a

$$\frac{l_0}{\omega_0} = \frac{l_0}{\omega'_0},$$

donc

$$\nu^2 = \nu'^2 \quad \text{ou} \quad \nu = \nu'.$$

Il en résulte que la simple réfraction ne sépare pas les deux vibrations.

Le second terme dans la parenthèse dépend de l_0 : il représente la dispersion; comme l'indice croît lorsque l_0 décroit, il faut que l_1 soit positif. Ce terme est proportionnel au carré de la longueur de l'onde; des expériences faites sur une grande étude du spectre ont montré qu'il doit y avoir, en effet, dans l'expression de l'indice de réfraction un terme proportionnel à l_0^2.

Si l'on néglige la dispersion, on a simplement

$$\nu^2 = (1 + g_1)^{n-1},$$

ν étant supérieur à 1, ainsi que n; il en resulte $g_1 > 0$.

VI. — Discussion des résultats précédents et conséquences.

On peut, par ce qui précède, se faire une idée de la grandeur de g_1; admettons $n = 6$, supposition à laquelle M. Briot a été conduit par l'étude de la double réfraction; on trouve

				g
Pour le diamant...	$\nu = 2,5$	$g_1 = 0,43$	Phosphore	0,38
Pour le verre.....	$\nu = 1,5$	$g_1 = 0,18$	Sulfure de carbone.	0,22
Pour l'eau........	$\nu = 1,33$	$g_1 = 0,12$	Acide sulfurique. .	0,16

Dans les équations qui ont servi à determiner δx, δy, δz, on a négligé les puissances de $\delta \Delta x$, $\delta \Delta y$, $\delta \Delta z$ supérieures à la première; les deuxièmes puissances donnant des termes identiquement nuls, on n'a, en réalité, négligé que des termes du troisième degré contenant en facteur g_1^3. Dans le cas extrême du diamant, ce facteur est moindre que 0,08.

La considération du signe de g_1 et de celui de l_1 conduit à des conséquences plus importantes et indépendantes de la valeur de n.

1° Supposons d'abord $n_1 \neq 1$ et de 4, on a trouvé

$$g_1 = -\frac{\mu_1}{3(n_1-1)(g+3h)}\sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

$$l_1 = -\frac{(n_1-2)\mu_1}{3}\sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1+1}};$$

g_1 devant être positif, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0.$$

Si $n_1 > 2$, l_1 n'est pas nul, et, comme il doit être positif, on en conclut $\mu_1 < 0$, car $n_1 - 2 > 0$.

De la première condition on conclut que si $g+3h > 0$, c'est-à-dire si $\omega_0'^2 > 0$, ou enfin si l'éther libre peut propager des vibrations longitudinales persistantes, *il faut que μ_1 soit négatif, c'est-à-dire que l'éther soit repoussé par le milieu pondérable.*

La seconde condition donne directement cette même conclusion et en outre semble impliquer que l'on doit en effet avoir

$$g+3h > 0.$$

2° Si $n_1 = 4$, on a

$$g_1 = \frac{-\mu_1}{9(g+3h)}\sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^3},$$

$$l_1 = \frac{-2\mu_1}{3}\sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^5};$$

d'où l'on tire les mêmes conséquences que précédemment.

3° Si $n_1 = 1$, on a

$$g_1 = \frac{\mu_1}{g+3h}\sum_1 m_1 \mathrm{L}\rho_1 - \frac{\mu_1}{3(g+3h)}\sum_1 m_1,$$

$$l_1 = \frac{\mu_1}{3}\sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^2};$$

le premier terme, dans la valeur de g_1, lui donne son signe; or, si l'on se borne aux particules pondérables voisines, on voit que $\mathrm{L}\rho_1$ est très

grand et négatif : donc il faut

$$g + \frac{\mu_1}{3h} < 0.$$

De ce que l_1 est positif, on conclurait $\mu_1 > 0$ et, par suite, $g + 3h < 0$.

Les conclusions sont renversées dans ce cas, mais il faut observer que, d'après une remarque faite par M. Briot (*Essai*, 33), n_1 doit être supérieur à 1 et même à 2, sans quoi l'action des particules pondérables les plus éloignées serait prépondérante ou tout au moins égale à celle des plus voisines, ce qui est contraire à l'observation; il est donc certain qu'il faut rejeter la supposition $n_1 = 1$.

Quant à la supposition $n_1 = 2$, bien qu'elle soit peu probable, nous ne la rejetterons pas absolument, et nous nous bornerons à conserver la conclusion tirée du signe de g_1, à savoir :

$$g + \frac{\mu_1}{3h} < 0.$$

On a vu que la distance r de deux particules d'éther se trouve remplacée par $(1 + g_1)r$: donc g_1 est le coefficient moyen de dilatation linéaire; les densités moyennes dans l'éther libre et dans celui qui pénètre le milieu pondérable sont dans le rapport $(1 + g_1)^3$; d'où l'on conclut que *la densité de l'éther est diminuée par la présence des particules pondérables.*

VII. — Milieux non cubiques

Dans les cristaux qui n'appartiennent pas au système cubique, les valeurs moyennes de quantités $u\,\partial x$, $v\,\partial y$, $w\,\partial z$ ne sont pas les mêmes; nous poserons

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} u\,\partial x &= g_1 + \alpha(1 + g_1),\\ v\,\partial y &= g_1 + \beta(1 + g_1),\\ w\,\partial z &= g_1 + \gamma(1 + g_1),\end{aligned}\right.$$

g_1 étant toujours donné par la formule

$$g_1 = \frac{1}{3}(u\,\partial x + v\,\partial y + w\,\partial z).$$

et les coefficients α, β, γ étant déterminés par ces équations mêmes. On en tire immédiatement

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Il s'agit maintenant de calculer les variations qu'éprouvent G et H lorsqu'on y remplace

$$\begin{aligned}
\Delta x \quad &\text{par} \quad (1 + g_1)(1 + \alpha)\Delta x,\\
\Delta y \quad &\text{par} \quad (1 + g_1)(1 + \beta)\Delta y,\\
\Delta z \quad &\text{par} \quad (1 + g_1)(1 + \gamma)\Delta z.
\end{aligned}$$

Nous désignerons pour un instant

$$(1 + \alpha)\Delta x, \quad (1 + \beta)\Delta y, \quad (1 + \gamma)\Delta z$$

par

$$\Delta' x, \quad \Delta' y, \quad \Delta' z.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
\text{G} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\sum \frac{m\mu}{r^{n+1}}(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2
\\ = \frac{1}{2(1+g_1)^{n-1}}\sum \frac{m\mu}{r'^{n+1}}(u\Delta' x + v\Delta' y + w\Delta' z)^2,
\end{aligned}$$

où

$$r' = \sqrt{\Delta' x^2 + \Delta' y^2 + \Delta' z^2}.$$

Nous verrons que α, β, γ sont très petits ; si l'on en néglige les secondes puissances, on aura

$$\begin{aligned}
\partial \text{G} = \frac{1}{(1+g_1)^{n-1}}\sum \frac{m\mu}{r^{n+1}}(u^2\alpha\Delta x^2 + v^2\beta\Delta y^2 + w^2\gamma\Delta z^2)
\\ - \frac{n+1}{2(1+g_1)^{n-1}}\sum \frac{m\mu}{r^{n+3}}(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2(\alpha\Delta x^2 + \beta\Delta y^2 + \gamma\Delta z^2),
\end{aligned}$$

et si l'on observe que les Σ se rapportent ici à l'éther libre et isotrope, on a, toutes réductions faites,

$$\partial \text{G} = \frac{2(g-h)}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2);$$

donc G prend la valeur

$$\frac{g}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2)+\frac{2(g+h)}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2).$$

Par de semblables calculs, on trouve

$$\delta H=\frac{h+l}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha x^2+\beta v^2+\gamma w^2)(u^2+v^2+w^2),$$

l désignant la constante

$$\frac{(n+1)(n+3)}{2.3.5.7}\sum\frac{m\rho}{r^{n-1}};$$

donc H prend la valeur

$$\frac{h}{4(1+g_1)^{n-1}}(u^2+v^2+w^2)^2$$
$$+\frac{h+l}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2)(u^2+v^2+w^2).$$

Nous poserons, pour abréger,

$$h'=\frac{h}{(1+g_1)^{n-1}},\quad g'=\frac{g}{(1+g_1)^{n-1}},\quad l'=\frac{l}{(1+g_1)^{n-1}},$$

et nous aurons finalement

$$G=g'(u^2+v^2+w^2)+2(g'+h')(\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2),$$
$$H=\frac{h'}{4}(u^2+v^2+w^2)^2+(h'+l')(\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2)(u^2+v^2+w^2).$$

Les axes de coordonnées étant choisis, comme on l'a dit, les coefficients

$$\sum_1 m_1\frac{F'_1(r_1)}{r_1}x_1y_1,\quad \sum_1 m_1\frac{F'_1(r_1)}{r_1}x_1z_1,\quad \sum_1 m_1\frac{F'_1(r_1)}{r_1}y_1z_1$$

sont toujours nuls; mais les coefficients

$$\sum_1 m_1\left[F_1(r_1)+\frac{F'_1(r_1)}{r_1}x_1^2\right],\quad \sum_1 m_1\left[F_1(r_1)+\frac{F'_1(r_1)}{r_1}y_1^2\right],$$
$$\sum_1 m_1\left[F_1(r_1)+\frac{F'_1(r_1)}{r_1}z_1^2\right]$$

ne sont plus égaux ; leur somme est toujours

$$3l_1 \quad \text{ou} \quad -n_1 - 2\sum \frac{m_1\mu_1}{\rho_1^{n+1}}, \quad \text{valeur moyenne.}$$

Nous les désignerons par L_1, M_1, N_1. On a maintenant

$$\begin{aligned}
L = {} & [(g'+h') + 2\alpha(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + 2u^2[h' + 4\alpha(h'+l')] \\
& + 2(g'+2h'+l')(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - L_1, \\
M = {} & [(g'+h') + 2\beta(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + 2v^2[h' + 4\beta(h'+l')] \\
& + 2(g'+2h'+l')(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - M_1, \\
N = {} & [(g'+h') + 2\gamma(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + 2w^2[h' + 4\gamma(h'+l')] \\
& + 2(g'+2h'+l')(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - N_1 ; \\
P = {} & 2uv\,[h' - 2\gamma(h'+l')], \\
Q = {} & 2uw\,[h' - 2\beta(h'+l')], \\
R = {} & 2vw\,[h' - 2\alpha(h'+l')].
\end{aligned}$$

De ce que la vitesse du rayon ordinaire, dans les cristaux à un seul axe optique, est la même dans toutes les directions et des lois relatives à la réfraction biaxiale, M. Briot a déduit $n = 6$; il en résulte

$$g' + 2h + l' = 0.$$

Les équations du mouvement prennent la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
& \{D_t^2 - [g'+h'+2\alpha(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + L_1\}\xi \\
& \qquad - 2u\{u[h' + 4\alpha(h'+l')]\xi \\
& \qquad\qquad + v[h' - 2\gamma(h'+l')]\eta + w[h' - 2\beta(h'+l')]\zeta\} = 0, \\
& \{D_t^2 - [g'+h'+2\beta(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + M_1\}\eta \\
& \qquad - 2v\{u[h' + 2\gamma(h'+l')]\xi \\
& \qquad\qquad + v[h' + 4\beta(h'+l')]\eta + w[h' - 2\alpha(h'+l')]\zeta\} = 0, \\
& \{D_t^2 - [g'+h'+2\gamma(h'+l')](u^2+v^2+w^2) + N_1\}\zeta \\
& \qquad - 2w\{u[h' - 2\beta(h'+l')]\xi \\
& \qquad\qquad + v[h' - 2\alpha(h'+l')]\eta + w[h' + 4\gamma(h'+l')]\zeta\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Considérons une vibration transversale incidente et dont le plan de l'onde soit perpendiculaire à l'axe ox; cette onde sera représentée par

$$\xi = 0, \quad \eta = \mathrm{B}e^{i(ax-st)}, \quad \zeta = \mathrm{C}e^{i(ax-st)}.$$

Cette vibration donne naissance, dans l'éther qui pénètre le milieu pondérable, à trois vibrations; soit

$$\xi' = \mathrm{A}'e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$
$$\eta' = \mathrm{B}'e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$
$$\zeta' = \mathrm{C}'e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)}$$

l'une d'elles : les équations d'accord à la surface de séparation que nous supposons être un plan perpendiculaire à ox donneront

$$b' = 0, \quad c' = 0, \quad s' = s;$$

donc on a simplement

$$\xi' = \mathrm{A}'e^{i(a'x-st)}, \quad \eta' = \mathrm{B}'e^{i(a'x-st)}, \quad \zeta' = \mathrm{C}'e^{i(a'x-st)}.$$

Les équations (18) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\{-s^2 + [g' + 3h' + 10\alpha(h' + l')]a'^2 + \mathrm{L}_1\}\mathrm{A}' = 0,\\ &\{-s^2 + [g' + h' + 2\beta(h' + l')]a'^2 + \mathrm{M}_1\}\mathrm{B}' = 0,\\ &\{-s^2 + [g' + h' + 2\gamma(h' + l')]a'^2 + \mathrm{N}_1\}\mathrm{C}' = 0.\end{aligned}\right.$$

De là trois solutions, savoir :

1° $\mathrm{B}' = 0$, $\mathrm{C}' = 0$ avec $s^2 = [g + h + 10\alpha(h' + l')]a'^2 + \mathrm{L}_1$,

vibration longitudinale s'exécutant suivant ox;

2° $\mathrm{A}' = 0$, $\mathrm{C}' = 0$ avec $s^2 = [g' + h' + 2\beta(h' + l')]a'^2 + \mathrm{M}_1$,

vibration rigoureusement transversale s'exécutant suivant oy;

3° $\mathrm{A}' = 0$, $\mathrm{B}' = 0$ avec $s^2 = [g' + h' + 2\gamma(h' + l')]a'^2 + \mathrm{N}_1$,

vibration rigoureusement transversale s'exécutant suivant oz

Ne nous occupons que des vibrations transversales, de la deuxième par exemple, on a

$$a' = \frac{2\pi}{l}, \quad s = \frac{\omega}{l} 2\pi,$$

puis, à cause de $g' + 2h' + l' = 0$ ou $n = 6$,

$$h' + l' = -(g' + h') = -\frac{g + h}{(1 + g_1)^2} = -\frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^2},$$

ω_0 désignant toujours la vitesse de propagation des vibrations transversales dans l'éther libre.

On a donc

$$\frac{4\pi^2\omega^2}{l^2} = \frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^2}(1 - 2\beta)\frac{4\pi^2}{l^2} + M_1$$

et, comme $\frac{l}{\omega} = \frac{l_0}{\omega_0}$,

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(1 + g_1)^2}{1 - 2\beta}\left(1 - \frac{M_1}{4\pi^2}\frac{l_0^2}{\omega_0^2}\right).$$

Or $\frac{\omega_0}{\omega}$ est ce que l'on appelle l'indice de réfraction relatif à l'axe oy; donc si ν_1, ν_2, ν_3 désignent ces indices relatifs aux trois axes ox, oy, oz, on aura

(19) $$\begin{cases} \nu_1^2 = \dfrac{(1 + g_1)^2}{1 - 2\alpha}\left(1 - L_1 \dfrac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2}\right), \\ \nu_2^2 = \dfrac{(1 + g_1)^2}{1 - 2\beta}\left(1 - M_1 \dfrac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2}\right), \\ \nu_3^2 = \dfrac{(1 + g_1)^2}{1 - 2\gamma}\left(1 - N_1 \dfrac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2}\right). \end{cases}$$

l_0 est la longueur d'onde incidente.

On observe que la loi de la dispersion est la même dans ce cas que dans un milieu isotrope; de plus, en supposant même que l'on eût $n_1 = 2$, c'est-à-dire $l_1 = 0$, on voit que L_1, M_1, N_1, tout en ayant une somme nulle, ne seraient pas nuls séparément, car, comme nous le verrons bientôt sur des coefficients analogues, ces trois coefficients ne

peuvent pas être égaux dans un milieu non cubique. Ainsi le terme en I_0^2 pourrait ne pas intervenir dans la dispersion observée sur un morceau de verre, et influer, au contraire, sur la dispersion dans le spath ou le quartz, par exemple. Dans ce qui va suivre, nous négligerons la dispersion, mais auparavant je ferai une dernière remarque sur ce phénomène. Si l_1 était nul, c'est-à-dire $n_1 = 2$, comme on a

$$L_1 + M_1 + N_1 = 3l_1 = 0,$$

L_1, M_1, N_1 ne seraient pas de même signe : l'un au moins serait négatif. Dans les cristaux à un axe optique, le spath par exemple, on aurait

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_o, \quad \nu_3 = \nu_e,$$

ν_o étant l'indice ordinaire, ν_e l'indice extraordinaire, puis $L_1 = M_1$ et, par suite, $N_1 = -2L_1$.

En supposant oz dirigé suivant l'axe du cristal, L_1 et N_1 seraient donc de signes contraires : donc la dispersion serait inverse pour les deux rayons, ce qui est contraire à l'observation.

Quand on néglige la dispersion, on peut lier les trois indices par une relation très simple, indépendante des coefficients α, β, γ.

On a alors

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\nu_1^2} &= \frac{1-2\alpha}{(1+g_1)^2}, \\ \frac{1}{\nu_2^2} &= \frac{1-2\beta}{(1+g_1)^2}, \\ \frac{1}{\nu_3^2} &= \frac{1-2\gamma}{(1+g_1)^2}; \end{aligned} \right.$$

en ajoutant et tenant compte de la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a simplement

$$(21)\qquad \frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} = \frac{3}{(1+g_1)^2}.$$

Cette relation permet de calculer g_1 pour un milieu cristallisé quelconque.

Ainsi on trouve

Pour le spath	$g_1 = 0,205$
Pour le quartz	$g_1 = 0,190$

Chacun des indices ν_1, ν_2, ν_3 étant supérieur à 1, le premier membre est inférieur à 3; on en conclut que $\frac{1}{(1+g_1)^3}$ est moindre que l'unité ou enfin que $g_1 > 0$.

De là on tire les mêmes conséquences que pour un milieu cubique ou isotrope.

(*A suivre.*)

Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

---

1. Le rôle si considérable que les déterminants jouent en Algèbre et dans toute l'Analyse a pour cause unique ce double fait : premièrement, qu'ils sont les éléments essentiels des formules de résolution des équations linéaires simultanées, ou, pour dire encore plus vrai, de toutes les relations que l'on rencontre dans l'étude des polynômes du premier degré; deuxièmement, que la théorie de ces polynômes précède et supporte celle des polynômes de degrés supérieurs, c'est-à-dire toute l'Algèbre, exactement comme les propriétés de la ligne droite et du plan dominent la Géométrie tout entière. Un peu d'attention convaincra chacun que les choses se passent bien ainsi, et cependant ce n'est pas de cette manière, tant s'en faut, qu'elles sont habituellement présentées.

On définit les déterminants par la loi de formation des termes de leurs développements, d'où l'on déduit la plupart de leurs propriétés, le tout *a priori*. Ces résultats sont ensuite appliqués indistinctement à la résolution des équations linéaires simultanées et à une suite de questions d'Algèbre, de Géométrie, de Mécanique, sans rapports directs les unes avec les autres.

Il semble ainsi que le hasard seul ait conduit les géomètres à la connaissance de ces expressions, et assuré une corrélation si extraor-

dinaire entre leurs propriétés et les problèmes à résoudre. Il semble encore que l'on réussirait à doter l'Analyse de nouvelles ressources d'égale importance, en faisant pareille provision de formules relatives à telles ou telles autres expressions construites d'avance au gré des caprices de l'imagination. D'un autre côté, l'enchaînement des propositions et le mécanisme des démonstrations conservent le caractère factice de la conception primitive d'où on les a fait dériver. En général, tout se borne à la vérification, assez pénible quelquefois, d'une suite de formules dont l'origine et la portée demeurent également obscures. La règle de multiplication de deux déterminants, par exemple, est réduite aux proportions exiguës du premier venu des artifices de calcul, sans que rien dans l'énoncé ni dans la démonstration puisse faire seulement soupçonner que l'on touche à une loi fondamentale de la composition et de la transformation des systèmes de formes.

Ces réflexions critiques, et d'autres que je supprime, se sont présentées à mon esprit avec une force nouvelle, dans le cours des recherches sur l'Analyse indéterminée du premier degré dont j'ai publié dernièrement le résultat (*Annales scientifiques de l'École Normale*; mars 1883); elles m'ont amené à refondre toute la matière en remettant chaque chose à sa place, c'est-à-dire les formes linéaires au premier plan, et les déterminants au second. Le public jugera si j'ai réussi à rendre cette théorie plus claire, à lui donner plus d'ampleur et de cohérence.

J'ai supprimé toute application particulière; il était bon sans doute d'en joindre quelques-unes à la théorie des déterminants, à l'époque encore peu éloignée où elle était à peine connue. Mais, actuellement, cette théorie a conquis dans l'enseignement la place qu'elle mérite d'y occuper; elle est devenue d'un usage courant dans toutes les parties des Mathématiques, et, pas plus que pour la formule du binôme ou pour la théorie des dérivées, il n'y a lieu désormais d'en réunir les innombrables applications.

Systèmes de formes linéaires en général.

2. La théorie des fonctions entières de degrés quelconques se ramène sans difficulté à celle des fonctions entières de mêmes degrés,

mais homogènes. Cette dernière fournit des énoncés beaucoup plus élégants et généraux qui, en outre, ont des avantages spéciaux pour les applications géométriques, et on la traite de préférence.

Pour abréger, on nomme *formes* les fonctions entières et homogènes d'un groupe donné de variables indépendantes en nombre quelconque, et *linéaires* les formes du premier degré dont nous avons à nous occuper.

Le type d'une forme linéaire est

$$(1)\qquad ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv,$$

où

$$(2)\qquad x,\ y,\ z,\ \ldots,\ s,\ t,\ \ldots,\ u,\ v$$

désignent les variables, et

$$(3)\qquad a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h,\ \ldots,\ i,\ j$$

des constantes en même nombre qui sont les *coefficients* de la forme.

Il convient de concevoir ces deux sortes de quantités comme nous venons de les écrire, c'est-à-dire comme se correspondant chacune à chacune dans deux *files* parallèles dont elles sont les *éléments*, et qui ont pour *longueur* commune le nombre des unes ou des autres.

La forme (1) pouvant être écrite aussi bien

$$xa + yb + zc + \ldots + sg + th + \ldots + ui + vj,$$

il y a parité parfaite entre les deux files (2), (3) relativement à sa structure. Cette réciprocité entre les variables et les coefficients appartient exclusivement aux formes linéaires, et imprime à leur théorie un caractère tout à fait spécial.

L'opération consistant à construire l'expression (1) au moyen des files de longueurs égales (2), (3) a beaucoup d'analogie avec la multiplication de deux facteurs, et se présente à chaque instant dans notre théorie. Nous l'appellerons l'*induction* mutuelle de ces deux files; l'expression (1), résultat de cette opération, est l'*induit* de ces deux files *inductrices*.

3. *Une forme linéaire telle que (1) s'évanouit, quelles que soient les valeurs de ses coefficients, quand on attribue zéro pour valeur particulière à chaque variable;* c'est évident.

Mais pour qu'elle s'évanouisse identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux variables, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls.

Il faut effectivement, en particulier, que la forme s'évanouisse pour $y = z = \ldots, s = t = \ldots = u = v = 0$, x non $= 0$, ce qui entraîne $a = 0$. Il faut, de même, que l'on ait aussi

$$b = c = \ldots = g = h = \ldots = i = j = 0.$$

La condition posée est donc nécessaire; il est évident, d'ailleurs, qu'elle est suffisante.

Dans beaucoup d'autres circonstances, nous aurons à distinguer, comme ici, les files dont les éléments sont tous nuls de celles où quelqu'un d'eux ne l'est pas; nous dirons les premières *vanescentes;* les dernières *invanescentes*.

4. Un *système* de formes linéaires est un ensemble de fonctions de cette espèce en nombre quelconque, qui dépendent toutes des mêmes variables, et que l'on considère simultanément; il peut, à la rigueur, ne contenir qu'une seule forme.

On écrit toujours dans le même ordre les variables de chaque forme, et habituellement les formes les unes au-dessus des autres, de manière à avoir pour type d'un système de m formes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ aux n variables (2),

$$(4)\quad \begin{cases} f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v, \\ f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 s + h_2 t + \ldots + i_2 u + j_2 v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ f_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v, \end{cases}$$

où les termes semblables s'alignent dans le sens vertical.

Il est avantageux de faire habituellement abstraction des variables

et de concevoir le système, par ce que nous appellerons son *abaque*, c'est-à-dire par sa notation ci-dessus, réduite aux coefficients des formes laissés aux places qu'ils y occupent :

$$(5)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & g_1 & h_1 & \dots & i_1 & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & g_2 & h_2 & \dots & i_2 & j_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & c_m & \dots & g_m & h_m & \dots & i_m & j_m. \end{matrix}\right.$$

Cet abaque affecte ainsi la disposition d'un quadrillage rectangulaire; on peut le décomposer en m files horizontales de même longueur (2) ou *lignes* ayant chacune pour éléments les coefficients d'une même forme, et aussi bien en n files verticales de longueurs égales ou *colonnes*, ayant chacune pour éléments les coefficients d'une même variable dans les diverses formes du système.

La *largeur* et la *hauteur* de l'abaque sont respectivement les longueurs de ses lignes et de ses colonnes; toutes deux, indistinctement, sont ses *dimensions*.

Une file, et même un seul élément, sont des abaques dont une dimension ou bien toutes deux se réduisent à 1.

5. Si dans une forme linéaire

$$(6)\qquad F_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_m\varphi_m$$

aux m variables $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, on remplace ces dernières par les formes de mêmes indices respectivement, dans le système (4), on en obtient une nouvelle f_1 également linéaire aux mêmes variables (2), qui est *composée* des formes *simples* (4) et de la *composante* (6).

Une forme composée résulte ainsi de l'induction (2) des formes simples considérées en file

$$f_1, f_2, \dots, f_m,$$

et de la file

$$(7)\qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

des coefficients de la composante, qui a même longueur. Ses coeffi-

cients sont aussi respectivement les induits de la file (7) par les diverses colonnes de l'abaque (5) des formes simples. Nous dirons que la file de ces coefficients est l'*induit* de la file (7) et de l'abaque (5) *par les colonnes* de celui-ci.

En composant successivement ainsi les formes simples (4) avec M composantes linéaires aux m mêmes variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$,

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m, \\ F_2 = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_m\varphi_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_M = \varpi_1\varphi_1 + \varpi_2\varphi_2 + \ldots + \varpi_m\varphi_m, \end{array}\right.$$

on obtient, au lieu d'une seule forme composée, un système de M formes

$$(9)\qquad f_1, f_2, \ldots, f_M,$$

qui est *composé* du système simple (4) et du système *composant* (8).

Le système composé peut être considéré comme obtenu en induisant, la file des formes simples, et l'abaque du système composant, *par ses lignes*.

Chaque ligne de l'abaque du système composé (9) résulte, comme nous l'avons dit, de l'induction de l'abaque du système simple par ses colonnes, et de la ligne correspondante de l'abaque du système composant, ce que nous exprimerons en disant que l'abaque du système composé est l'*induit, colonne à ligne, de l'abaque du système simple par celui du composant*.

6. Pour exprimer qu'une forme donnée peut être engendrée par la composition de formes simples données avec quelque composante linéaire, nous dirons qu'elle est *agrégée à ces formes ou bien à leur système*. Nous dirons de même qu'un système est *agrégé* à un autre s'il peut être considéré comme résultant de sa composition avec quelque système composant de formes linéaires.

Ces dénominations sont utiles, parce qu'elles dispensent de mentionner la forme ou le système composant, dont il y a effectivement lieu de faire souvent abstraction. Quelquefois, cependant, il faut y avoir

égard : nous dirons alors que les coefficients de la forme composante dans le premier cas sont les *multiplicateurs* ou *éléments de la file d'agrégation* de la forme composée aux formes simples données ou à leur système; que les coefficients du système composant dans le second cas forment l'*abaque d'agrégation* du système composé au système simple.

Quand on fait ainsi abstraction des formes composantes pour ne considérer que leurs coefficients, il est plus commode de concevoir en colonne, comme sont écrites les formes simples, les éléments de chaque file d'agrégation. L'abaque d'agrégation a ainsi pour colonnes les lignes de l'abaque du système composant.

Ces définitions font saisir immédiatement ce que nous voudrons exprimer en disant quelquefois qu'une file d'éléments est agrégée à quelques autres (de même longueur) ou à leur abaque, par les files de ce même sens, avec telle ou telle file d'agrégation : qu'un abaque est agrégé à un autre ayant une dimension commune avec lui, par les files de cette dimension, avec tel ou tel abaque d'agrégation.

Une file vanescente (5) *est agrégée à telles autres (de même longueur) que l'on voudra;* car des multiplicateurs tous nuls composent évidemment une file d'agrégation.

Une file agrégée à quelques autres l'est aussi aux mêmes accompagnées de telles autres que l'on voudra; car on obtient évidemment une file d'agrégation de la première file considérée à toutes les autres, en adjoignant à sa file d'agrégation, avec celles du premier groupe, autant de zéros qu'il y a de files dans le second groupe.

7. Il est évident qu'*un système de formes linéaires (ou abaque) agrégé à un autre qui l'est à un troisième est aussi agrégé à ce dernier.*

8. Nous dirons que deux systèmes de formes linéaires ou leurs abaques *par les lignes* sont *équivalents,* si chacun d'eux est agrégé à l'autre.

D'après la remarque précédente : *deux systèmes dont chacun est équivalent à un même troisième le sont aussi l'un à l'autre.*

9. Un système donné (ou abaque) est *réductible* ou *irréductible*, selon qu'il est possible ou non de trouver quelque système de formes (ou de files) en nombre moindre, auquel il soit agrégé. Nous considérerons

aussi comme réductible un système constitué par une seule forme dont la file des coefficients est vanescente.

D'après cette définition, *deux systèmes irréductibles équivalents contiennent nécessairement des formes en nombres égaux.*

10. Nous introduirons un nouveau terme dans le langage en disant que deux files d'éléments sont en *symptose* [1], si elles ont même longueur et un induit nul (**2**); qu'une file est en *symptose* avec un abaque *par ses files de tel sens désigné*, si elle l'est avec chacune des files en question, ou plus brièvement, si l'induit de cette file et de l'abaque par ses files du sens considéré (**5**) est une file vanescente.

11. *Un abaque de dimensions inégales étant donné, on peut toujours mettre en symptose avec lui par ses files les plus longues quelque file invanescente; et même il y a dans cette file un groupe d'éléments en nombre au moins égal à la différence des dimensions de l'abaque, dont on peut choisir arbitrairement les valeurs.*

S'il s'agit, par exemple, de l'abaque (5), et si l'on y suppose $m < n$, la recherche des éléments

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ s,\ t,\ \ldots,\ u,\ v \tag{10}$$

de toute file de longueur n en symptose avec lui par les lignes dépendra de la résolution des m équations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + g_1s + h_1t + \ldots + i_1u + j_1v = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + g_2s + h_2t + \ldots + i_2u + j_2v = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx + b_my + c_mz + \ldots + g_ms + h_mt + \ldots + i_mu + j_mv = 0, \end{array}\right.$$

[1] De σύν, ensemble, πτῶσις, chute. Un point *tombe* en quelque sorte sur un plan, sur une droite, s'il y a ainsi *symptose* entre la file de ses coordonnées homogènes et celle des coefficients de l'équation du plan, ou bien celles des coefficients des deux équations de la droite. Un plan *tombe* aussi sur 1, 2 ou 3 points, s'il y a symptose entre la file des coefficients de son équation et celles des coordonnées de ces points, etc. Ce sont des considérations de ce genre qui me font proposer cette dénomination pour une relation qui se présente très fréquemment dans notre théorie.

et nous avons à prouver qu'elles admettent toujours quelque file de solutions dont les valeurs de $n-m$ au moins peuvent être choisies à volonté.

1° *Notre proposition est vraie quand l'abaque contient une seule ligne, sa première, par exemple.*

Si d'abord cette ligne est vanescente, l'équation unique à résoudre

$$a_1 x + b_1 y + \ldots = 0$$

est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de $x, y, \ldots$ (5), et dans la file (10) il y a bien $n-1$ et même n éléments tout à fait arbitraires.

Dans le cas contraire, soit a_1 un de ses éléments non nuls. On peut alors diviser par a_1 tous les termes de l'équation précédente et l'écrire

$$(12) \qquad x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z - \ldots - \frac{l_1}{a_1}v.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que l'on satisfera à cette équation en attribuant des valeurs quelconques $y', z', \ldots, v'$ aux $n-1$ derniers éléments de la file (10), et en prenant le premier x égal à

$$-\frac{b_1}{a_1}y' - \frac{c_1}{a_1}z' - \ldots - \frac{l_1}{a_1}v'.$$

2° *Elle est vraie pour l'abaque (5) tout entier, si elle l'est pour un abaque de $m-1$ lignes et de n ou $n-1$ colonnes.*

Si la première ligne de l'abaque est vanescente, toutes les files de valeurs des quantités (10) satisfaisant aux $m-1$ dernières équations (11) satisferont forcément aussi à la première. Or, d'après l'hypothèse, cette condition laisse arbitraires $n-(m-1)=n-m+1$ de ces éléments au moins et à plus forte raison $n-m$ au moins.

Si cette ligne est invanescente, soit encore a_1 un de ses éléments non nuls. Comme nous venons de le voir (1°), on satisfera à la première équation (11) en choisissant arbitrairement les valeurs de $y, z, \ldots, v$, et en donnant simultanément à x la valeur déterminée par la formule (12). De plus, toutes ces valeurs satisferont aux $m-1$ autres

équations, si, en les y portant, les égalités résultantes

$$\begin{aligned}
&\left(b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - a_2\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_2 - a_2\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0,\\
&\left(b_3 - a_3\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_3 - a_3\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_3 - a_3\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\left(b_m - a_m\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_m - a_m\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_m - a_m\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0
\end{aligned}$$

ont lieu, c'est-à-dire si l'on a pris pour $y, z, \ldots, v$ une file de $n-1$ éléments en symptose par les lignes avec l'abaque des coefficients de ces quantités dans ces égalités, abaque qui n'a plus que $m-1$ lignes et $n-1$ colonnes. Or c'est ce qui est réalisable d'après l'hypothèse, cela même en choisissant arbitrairement les valeurs de $n-1-(m-1) = n-m$ certains de ces éléments.

3° *Notre proposition est donc générale*, car le raisonnement ci-dessus en réduit successivement la vérification à l'examen des cas où dans l'abaque il y a $m-1$, $m-2$, ..., 2, 1 lignes avec $n-1$, $n-2$, ..., $n-m+2$, $n-m+1$ colonnes au moins, cas dans le dernier desquels son exactitude a été établie directement (1°).

12. Nous dirons qu'un abaque *est vanescent ou invanescent par ses files de tel sens déterminé*, selon qu'il est possible ou non d'assigner une file invanescente en symptose avec lui par ses files de l'autre sens.

Un abaque vanescent par les files d'un certain sens l'est encore si on lui ajoute d'autres files quelconques du même sens, ou bien si on lui en retranche quelques-unes de l'autre sens. Car on obtient évidemment une file invanescente en symptose avec lui par ses files de l'autre sens, en ajoutant quelques zéros à celle qui est supposée être en symptose avec lui avant l'adjonction de ses nouvelles files.

Un abaque invanescent par les files d'un certain sens ne cesse pas de l'être si l'on vient à en supprimer quelques-unes ou bien à en ajouter arbitrairement dans l'autre sens. Car si l'abaque ainsi tronqué était vanescent, l'abaque tout entier le serait aussi par ce qui précède, ce qui est contraire à ce que l'on suppose

Il résulte en particulier du lemme ci-dessus (**11**) qu'*un abaque de*

dimensions inégales est toujours vanescent par ses files les moins longues, (ou les plus nombreuses). En exprimant l'invanescence d'un abaque, on peut donc se dispenser de spécifier le sens des files pour lequel elle a lieu; il ne peut effectivement s'agir alors que des plus longues.

13. Un abaque est *carré* quand ses deux dimensions sont égales; il convient alors de choisir le mot *hauteur* pour désigner leur valeur commune.

Un abaque carré ne peut être vanescent, ni par suite invanescent, dans un sens, sans l'être en même temps dans l'autre sens.

L'abaque (5), par exemple, étant carré avec m files dans chaque sens, supposons qu'il soit vanescent par les colonnes, et que la file (10) où x, par exemple, a une valeur différente de zéro, soit en symptose avec lui par les lignes. On aura alors les relations (11).

Maintenant (**11**), on peut assigner une file invanescente de m éléments

$$(12\ bis) \qquad \lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_m,$$

avec laquelle soit en symptose chacune des $n-1=m-1$ dernières colonnes de cet abaque. Cela posé, *induisons* par cette file les m relations (11), c'est-à-dire ajoutons-les membre à membre, préalablement multipliées par les éléments correspondants de cette file. Il viendra

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m) x + 0.y + \ldots + 0.e = 0,$$

d'où

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_m\lambda_m = 0,$$

puisque x non $= 0$. La file invanescente (12 *bis*), qui était déjà en symptose avec les $m-1$ dernières colonnes, l'est donc encore avec la première, et notre abaque est vanescent par les lignes.

Pour un abaque carré, il est donc inutile de spécifier les files par lesquelles il est vanescent ou invanescent.

14. *Dans un sens donné de l'abaque (5), il existe ou non quelque file agrégée (**6**) à ses parallèles, suivant que cet abaque est vanescent ou invanescent par les files dont il s'agit.*

Supposons, par exemple, que la première ligne soit agrégée aux autres avec $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ pour file d'agrégation. On aura, pour une colonne quelconque notée par la lettre k, la relation

$$k_1 = \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \ldots + \lambda_m k_m,$$

qui peut s'écrire

$$1 . k_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3 - \ldots - \lambda_m k_m = 0.$$

L'abaque est donc en symptose par les colonnes avec la file invanescente

$$1, \quad -\lambda_2, \quad -\lambda_3, \quad \ldots, \quad -\lambda_m,$$

partant vanescent par les lignes.

Supposons au contraire notre abaque vanescent par les lignes, et par exemple en symptose par les colonnes avec la file invanescente λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Si l'élément λ_1, pour fixer les idées, est l'un de ceux qui ne sont pas nuls, on pourra diviser par λ_1 les relations telles que

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_m k_m = 0,$$

qui ont lieu pour toutes les colonnes de l'abaque et les écrire sous la forme

$$k_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} k_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} k_3 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} k_m.$$

On voit ainsi que la première ligne est agrégée aux autres avec

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad \ldots, \quad -\frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

pour multiplicateurs d'agrégation.

On remarquera que, *dans un abaque vanescent par certaines files, on peut considérer l'une d'elles comme agrégée à ses parallèles si elle correspond à quelque élément non nul dans une file invanescente en symptose avec l'abaque par ses files de l'autre sens.*

15. *Le système des formes linéaires (4) est réductible ou irréductible selon que, par les lignes, son abaque est vanescent ou invanescent.*

Quand $m = 1$, cet énoncé ne fait que reproduire la définition du n° **9**.

Supposons donc $m > 1$, et ce système agrégé à celui des $m' < m$ formes

$$f'_1, f'_2, \ldots f'_{m'},$$

par les identités

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 f'_1 + \lambda_2 f'_2 + \ldots + \lambda_{m'} f'_{m'}, \\ f_2 &= \mu_1 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \ldots + \mu_{m'} f'_{m'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m &= \varpi_1 f'_1 + \varpi_2 f'_2 + \ldots + \varpi_{m'} f'_{m'}. \end{aligned}$$

L'abaque des multiplicateurs $\lambda, \ldots, \varpi_m$ étant plus haut que large, à cause de $m > m'$, on peut assigner une file invanescente de m éléments

$$(13) \qquad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$$

en symptose avec lui par les colonnes (**11**).

En induisant donc par cette file les relations précédentes, il viendra l'identité

$$(14) \qquad \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = 0,$$

en vertu de laquelle (**5**) les induits de la file (13) et de l'abaque (5) par ses colonnes sont tous nuls. Cet abaque est donc, par les colonnes, en symptose avec la file invanescente (13), c'est-à-dire vanescent par les lignes (**12**).

Si, au contraire, l'abaque (5) est vanescent par les lignes, quelqu'une d'elles, la première par exemple, est agrégée aux autres (**14**), ou, ce qui revient au même, la première forme f_1 du système (4) est agrégée aux $m - 1$ autres. Or, chacune de ces $m - 1$ formes est agrégée à leur propre système à cause des identités évidentes

$$\begin{aligned} f_2 &= 1 . f_2 + 0 . f_3 + \ldots + 0 . f_m, \\ f_3 &= 0 . f_2 + 1 . f_3 + \ldots + 0 . f_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m &= 0 . f_2 + 0 . f_3 + \ldots + 1 . f_m. \end{aligned}$$

Le système (4) est donc agrégé à celui que constituent ses $m - 1$ dernières formes seulement, partant réductible.

16. *Dans un système irréductible, le nombre des formes ne peut surpasser celui des variables,* car sinon l'abaque du système serait plus haut que large et, en conséquence, vanescent par les lignes (**12**).

On peut s'en assurer autrement en remarquant que chacune des n variables $x, y, z, \ldots v$ peut être considérée comme étant une forme linéaire, et que toutes ensemble elles constituent un système spécial auquel tout autre est évidemment agrégé. Si donc m est $> n$, le système (4) est agrégé à un autre dont les formes sont en moindre nombre, partant réductible.

17. *Pour qu'une forme*

$$f = ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv$$

soit agrégée au système (4) *supposé irréductible, il est nécessaire et suffisant que l'abaque de* $m + 1$ *lignes obtenu en adjoignant celle des coefficients de* f *à l'abaque* (5) *soit vanescent par les lignes.*

La condition posée est nécessaire, car alors dans l'abaque considéré de $m + 1$ lignes, la première est agrégée aux autres (**14**).

Si, au contraire, on suppose cet abaque vanescent par les lignes, soit

$$\theta, \ \theta_1, \ \theta_2 \ \ldots \ \theta_m$$

une file invanescente en symptose avec lui par les colonnes. Le multiplicateur θ ne peut être nul : car, s'il l'était, quelque autre appartenant à la file de m éléments

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \ldots, \ \theta_m$$

ne le serait pas, et comme cette file, ainsi invanescente, est alors en symptose par les colonnes avec l'abaque (5), celui-ci serait vanescent par les lignes et le système (4) réductible, contrairement à l'hypothèse.

Dans l'abaque considéré de $m + 1$ lignes, la première est donc

agrégée aux autres, ou bien, ce qui revient au même, la forme f est agrégée au système (4).

18. *Si le système* (4) *est irréductible et contient autant de formes qu'il y a de variables, la forme f, quelle qu'elle soit, lui est nécessairement agrégée;* car alors l'abaque de $m+1$ lignes considéré ci-dessus est plus haut que large, et en conséquence vanescent par les lignes (**12**).

19. *Si le système* (4) *est irréductible et agrégé à un autre système irréductible de m formes aussi*

$$f'_1, f'_2, \ldots, f'_m,$$

réciproquement ce dernier est agrégé au proposé et tous deux, par suite, sont équivalents.

Par hypothèse, on a m identités telles que

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 f'_1 + \lambda_2 f'_2 + \ldots + \lambda_m f'_m, \\ f_2 &= \mu_1 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \ldots + \mu_m f'_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= \varpi_1 f'_1 + \varpi_2 f'_2 + \ldots + \varpi_m f'_m, \end{aligned}$$

où les multiplicateurs d'agrégation $\lambda_1, \ldots, \varpi_m$ forment un abaque carré de hauteur m.

Cela posé, on peut assigner une file invanescente de m éléments

(15) $$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$$

qui soit en symptose avec chacune des $m-1$ dernières colonnes de l'abaque d'agrégation (**11**), et si l'on induit par cette file les identités précédentes, il viendra cette autre

(16) $$\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = \Theta f'_1,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\theta_1 \lambda_1 + \theta_2 \mu_2 + \ldots + \theta_m \varpi_m = \Theta.$$

Or Θ ne peut être nul, car sinon l'identité précédente se réduirait à

$$\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = 0,$$

en vertu de laquelle la file (15) serait en symptose avec l'abaque (4) par ses colonnes; comme elle est invanescente, cet abaque serait vanescent et le système (4) réductible contrairement à l'hypothèse (15).

On peut donc diviser par Θ tous les termes de l'identité (16) et l'écrire

$$f'_1 = \frac{\theta_1}{\Theta} f_1 + \frac{\theta_2}{\Theta} f_2 + \ldots + \frac{\theta_m}{\Theta} f_m.$$

La forme f'_1 est donc agrégée au système (4), et l'on prouverait de la même manière qu'il en est ainsi pour chacune des autres formes du second des systèmes considérés.

20. *Si le système (4) est réductible sans que tous les éléments de son abaque soient nuls, on peut constituer un système irréductible équivalent, avec une partie seulement des formes qui le composent, formes dont le nombre n'excède pas le plus petit des entiers m, n.*

Écrivons les formes proposées dans un ordre quelconque, en commençant par une de celles dont les coefficients sont supposés ne pas être tous nuls, puis biffons successivement toute forme agrégée au système partiel constitué par les formes précédemment écrites, mais non biffées. L'opération achevée, les formes considérées se trouvent réparties entre deux systèmes partiels contenant, l'un $(S)_\mu$, les formes f', f'', ..., $f^{(\mu)}$ qui n'ont pas été biffées, l'autre $(S)_\nu$ celles qui l'ont été.

Le système $(S)_\mu$ est irréductible, car si une file invanescente θ', θ'', ..., $\theta^{(\mu)}$ était en symptose avec les colonnes de son abaque, on aurait l'identité

$$\theta' f' + \theta'' f'' + \ldots + \theta^{(\mu)} f^{(\mu)} = 0,$$

qui se réduirait à

$$\theta' f' + \theta'' f'' + \ldots + \theta^{(k)} f^{(k)} = 0,$$

en appelant $\theta^{(k)}$ le premier des multiplicateurs θ', ..., $\theta^{(\mu)}$ qui ne sont pas nuls, quand on les considère dans l'ordre des accents décroissants.

D'où l'on tirerait, en divisant par $\theta^{(k)}$ qui n'est pas nul,

$$f^{(k)} = -\frac{\theta'}{\theta^{(k)}}f - \frac{\theta''}{\theta^{(k)}}f'' - \ldots,$$

et la forme $f^{(k)}$ serait agrégée à celles qui la précèdent dans le système $(S)_\mu$, ce qui n'est pas, puisque cette forme n'a pas été biffée.

Le même système $(S)_\mu$ est agrégé au proposé, parce qu'il ne contient que des formes lui appartenant; celui-ci l'est à $(S)_\mu$, parce qu'il est composé des formes de $(S)_\mu$ évidemment agrégées à elles-mêmes, et de celles de $(S)_\nu$ qui le sont aussi aux mêmes, parce qu'elles ont été biffées. Le système irréductible partiel $(S)_\mu$ est donc équivalent au proposé.

Finalement μ, nombre des formes de $(S)_\mu$, ne peut surpasser n, nombre des variables, parce que ce système est irréductible (**16**), ni m, nombre des formes du proposé, parce que toute forme de $(S)_\mu$ appartient naturellement à ce dernier.

Selon l'ordre dans lequel les formes considérées auront été écrites, le système *réduit* $(S)_\mu$ pourra contenir tel ou tel groupe des formes du proposé; mais, quoique constitués par des formes différentes, ces systèmes réduits sont équivalents entre eux, parce qu'ils le sont tous au proposé, et ils contiennent des formes en nombres égaux parce qu'ils sont équivalents entre eux et irréductibles.

21. Dans un abaque tel que (5), nous appellerons *diagonale* tout groupe d'éléments en nombre égal à la moindre dimension, et tellement choisis que deux quelconques ne tombent à la fois ni dans une même ligne, ni dans une même colonne. Cela posé :

Le système (4) est irréductible si m est $\leq n$ et si, dans m colonnes de son abaque, tous les éléments sont nuls, ceux d'une seule diagonale exceptés.

Supposons, pour fixer les idées, que, s étant la $m^{\text{ième}}$ variable, les éléments $a_1, b_2, c_3, \ldots, g_m$ de l'abaque, qui composent une certaine diagonale, soient tous différents de zéro, mais que dans leurs colonnes tous les autres soient nuls. Si une file de m éléments est en symptose avec l'abaque par ses colonnes, on a en particulier

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_m\lambda_m = 0,$$

d'où $a_1\lambda_1 = 0$, parce que $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$ par hypothèse, puis $\lambda_1 = 0$, à cause de a_1 non $= 0$; et, en considérant les $m - 1$ colonnes venant après la première dans l'abaque (5), on prouverait de même que l'on doit avoir aussi

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ainsi aucune file ne peut être en symptose avec les colonnes de l'abaque (5), à moins d'être vanescente; cet abaque est donc invanescent par les lignes et le système (4) est irréductible.

Il nous faut encore un mot pour désigner les systèmes dont l'irréductibilité tient à la cause qui vient d'être analysée et s'aperçoit à première vue. Nous dirons qu'ils sont en *réduction apparente;* et, pour le système considéré ci-dessus, nous nommerons *saillantes,* tant la diagonale en question $a_1, b_2, c_3, \ldots, g_m$ que les m colonnes dont ses éléments font partie, et que les m variables $x, y, z, \ldots, s$ dont les coefficients forment ces colonnes.

22. *Si la forme*

$$f = ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv$$

est agrégée au système (4) *supposé en réduction apparente avec*

$$a_1,\ b_2,\ c_3,\ \ldots,\ g_m$$

pour diagonale saillante, la file d'agrégation est

$$\frac{a}{a_1},\ \frac{b}{b_2},\ \frac{c}{c_3},\ \ldots,\ \frac{g}{g_m}.$$

En appelant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs inconnus de cette file, on doit avoir d'abord

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m,$$

d'où $a = \lambda_1 a_1$, puisque $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$; puis $\lambda_1 = \frac{a}{a_1}$, à cause

de a_1, non $= 0$, ce qui permet de diviser par a_1 les deux membres de l'égalité précédente. Et de même $\lambda_2 = \frac{b}{b_2}$, ...

23. *Si, dans la forme f, m — 1 des variables saillantes du même système* (4) *ont des coefficients nuls, il faut et il suffit, pour qu'elle soit agrégée à ce système, qu'elle le soit à celle de ses formes où l'autre variable saillante a un coefficient différent de zéro.*

Si par exemple $b, c, \ldots, g$, coefficients dans f des $m - 1$ variables, $y, z, \ldots, s$, qui sont saillantes dans le système (4), sont tous nuls, l'agrégation de f à ce système exige, par ce qui précède, que l'on ait pour la file d'agrégation

$$\lambda_1 = \frac{a}{a_1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0,$$

d'où l'identité

$$f = \frac{a}{a_1} f_1,$$

en vertu de laquelle f est agrégée à f_1. Si d'ailleurs cette identité a lieu, f est certainement agrégée au système considéré.

24. *Pour que deux systèmes en réduction apparente aux mêmes variables saillantes soient équivalents, il faut et il suffit que chaque forme de l'un soit individuellement équivalente à son homologue dans l'autre, c'est-à-dire à celle où la même variable saillante a un coefficient différent de zéro.*

Ce théorème résulte immédiatement du précédent, puisque, dans toute forme de l'un des systèmes proposés, les coefficients de $m - 1$ variables saillantes de l'autre se réduisent à zéro.

25. *Si le système* (4) *est irréductible, cas auquel $m \leq n$* (**16**), *les coefficients d'un groupe au moins de m variables forment un abaque partiel carré invanescent* (**13**), *et l'on peut assigner un système en réduction apparente équivalent au proposé, où ces m variables soient saillantes.*

1° On peut *réduire* l'abaque (5) par les colonnes (**20**), c'est-à-dire en extraire de celles-ci n', nombre non supérieur à m ni à n, constituant un abaque partiel invanescent par les colonnes et auquel toutes les autres colonnes du proposé soient agrégées.

On ne peut avoir $n' < m$; car $a, b, c, \ldots, e$ étant les lettres affectées à la notation de ces n' colonnes, on aurait pour toute autre colonne k de l'abaque les relations d'agrégation

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \ldots + \varpi e_1, \\ k_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \ldots + \varpi e_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_m &= \lambda a_m + \mu b_m + \nu c_m + \ldots + \varpi e_m, \end{aligned}$$

$\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varpi$ étant les multiplicateurs d'agrégation ; et, en induisant ces égalités par quelque file invanescente de m multiplicateurs θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_m$ en symptose avec chacune de ces n' colonnes (**11**), il viendrait aussi

$$\theta_1 k_1 + \theta_2 k_2 + \ldots + \theta_m k_m = 0.$$

Il existerait ainsi une file invanescente en symptose avec l'abaque (5) par ses colonnes, et, contrairement à l'hypothèse, le système (4) serait réductible. Le nombre n' ne pouvant être ni supérieur ni inférieur à m lui est donc égal, et l'abaque partiel de ces $n' = m$ colonnes est aussi carré et invanescent.

2° Supposons actuellement que l'abaque partiel des coefficients des m premières variables $x, y, z, \ldots, s$ soit l'un de ceux dont l'invanescence vient d'être établie, et induisons le système (4) par une colonne invanescente de n multiplicateurs

$$(17) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

en symptose avec celles des coefficients des $m-1$ variables y, $z, \ldots, s$ (**11**). Il en résultera une forme agrégée à ce système

$$f'_1 = a'_1 x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s + h'_1 t + \ldots + i'_1 u + j'_1 v,$$

où $a'_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$ ne peut s'évanouir, car autrement la file (17) serait aussi en symptose avec la première colonne de l'abaque (5), et, contrairement à ce que nous avons supposé, l'abaque carré de ces m premières colonnes serait vanescent.

En opérant de même, on trouvera $m-1$ autres formes $f_2, f_3, \ldots, f_m$ toutes agrégées, comme la précédente, au système proposé et formant avec elle un système de m formes en réduction apparente aux variables saillantes $x, y, z, \ldots, s$. Ce système étant irréductible et agrégé au proposé, inversement celui-ci lui est agrégé et tous deux sont équivalents (**19**).

ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES.

26. Une équation quelconque étant donnée, on réduit habituellement son second membre à zéro en faisant passer dans l'autre tous les termes qu'il contenait; il vient alors dans cet autre membre une expression contenant les inconnues, qui en est une certaine fonction quand on les considère comme autant de variables indépendantes, et que l'on nomme le *premier membre* de l'équation dont il s'agit.

L'équation est dite *linéaire* quand son premier membre ainsi défini est une fonction du premier degré, *linéaire et homogène*, quand il se réduit à une forme linéaire.

Plusieurs équations auxquelles il faut satisfaire à la fois, par des valeurs convenables attribuées à un certain ensemble d'inconnues qu'elles contiennent, constituent un *système d'équations simultanées* entre ces inconnues. Un groupe de valeurs des inconnues satisfaisant en même temps à toutes ces équations sera ce que nous appellerons une *file de solutions* de leur système.

Nous allons traiter des systèmes d'équations linéaires dont nous ramènerons toute la théorie à celle des systèmes homogènes, et nous emploierons pour ces derniers les dénominations d'*agrégés*, *équivalents*, *réductibles*, *irréductibles*, etc., dans toutes les circonstances où elles sont applicables aux formes linéaires qui constituent leurs premiers membres (nos 6 et suivants).

On remarquera que la résolution d'un système d'équations linéaires et homogènes est au fond la même recherche que celle de toutes les files de quantités qui sont en symptose par les lignes avec *son abaque*, c'est-à-dire celui des premiers membres des équations qui le composent.

27. *Étant donné deux systèmes d'équations linéaires et homogènes*

$$(1)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_m = 0,$$

$$(2)\qquad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad \ldots,\quad F_\mu = 0,$$

le second admet toutes les files de solutions du premier, s'il lui est agrégé.

Soient F un quelconque des premiers membres des équations (2) et $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$ sa file d'agrégation aux premiers membres des équations de l'autre système; on a, par hypothèse,

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux inconnues, considérées un instant comme autant de variables indépendantes. On a donc en particulier $F = 0$, pour les valeurs de ces inconnues qui constituent une file de solutions du premier système, car alors les formes f_1, $f_2, \ldots, f_m$ prennent toutes des valeurs nulles.

Dans ce cas, on dit souvent que le second système est une *conséquence* du premier, ou bien encore que celui-ci *entraîne* l'autre.

28. *Les systèmes* (1), (2) *admettent les mêmes solutions s'ils sont équivalents.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent et ramène immédiatement la résolution d'un système réductible à sa réduction (**20**) suivie de la résolution du système équivalent. Nous ne considérerons donc que des systèmes irréductibles.

La réduction à laquelle nous faisons allusion n'est toutefois pas applicable dans le cas où les coefficients des premiers membres des équations proposées sont tous nuls. Mais alors chacun de ces premiers membres est nul identiquement, et les équations sont *identiques*, c'est-à-dire admettent pour solutions toutes les files imaginables de valeurs des inconnues.

29. *Soit*

$$(3)\quad \begin{cases} f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v = 0. \end{cases}$$

un système irréductible de m équations linéaires et homogènes aux n inconnues $x, y, \ldots, v$ pour lequel on a, par suite, $m \leq n$ (**16**).

Quand $m = n$, il n'admet pour solutions qu'une file vanescente.

Quand $m < n$, il admet une infinité de files de solutions dans chacune desquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires à $n - m$ inconnues,

si toutefois on les a choisies de telle sorte que l'abaque des coefficients des m autres soit invanescent (25), *et cette attribution détermine entièrement les valeurs des m inconnues restantes.*

Si dans le cas de $m = n$ le système (3) admettait une file de solutions invanescente, son abaque, qui est en symptose avec cette file par les lignes, serait vanescent par les colonnes et aussi par les lignes puisqu'il est carré (15), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons maintenant $m < n$: comme l'abaque du système est invanescent par les lignes d'après l'hypothèse, un groupe au moins de m de ses colonnes forme un abaque carré invanescent, et le système proposé est équivalent à quelque autre en réduction apparente, où sont saillantes les inconnues dont les coefficients forment ces m colonnes (25).

Soient $x, y, z, \ldots, s$ ces m inconnues et

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l} A_1 x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s + H_1 t + \ldots + I_1 u + J_1 v = 0, \\ 0.x + B_2 y + 0.z + \ldots + 0.s + H_2 t + \ldots + I_2 u + J_2 v = 0, \\ 0.x + 0.y + C_3 z + \ldots + 0.s + H_3 t + \ldots + I_3 u + J_3 v = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0.x + 0.y + 0.z + \ldots + G_m s + H_m t + \ldots + I_m u + J_m v = 0, \end{array}\right.$$

le système équivalent en réduction apparente dont il s'agit.

Les systèmes (3) et (4) étant équivalents admettent les mêmes files de solutions (28). Or $A_1, B_2, \ldots, G_m$ étant tous différents de zéro, on peut diviser par ces coefficients toutes les équations du dernier système respectivement, et les écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{H_1}{A_1} t - \ldots - \frac{I_1}{A_1} u - \frac{J_1}{A_1} v, \\ y = -\frac{H_2}{B_2} t - \ldots - \frac{I_2}{B_2} u - \frac{J_2}{B_2} v, \\ z = -\frac{H_3}{C_3} t - \ldots - \frac{I_3}{C_3} u - \frac{J_3}{C_3} v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s = -\frac{H_m}{G_m} t - \ldots - \frac{I_m}{G_m} u - \frac{J_m}{G_m} v. \end{array}\right.$$

Sous cette forme il est évident que les valeurs des $n-m$ inconnues $t, \ldots, u, v$ peuvent être choisies arbitrairement, et qu'ensuite les valeurs des m autres $x, y, z, \ldots, s$ sont déterminées et fournies par ces formules elles-mêmes.

50. Nous verrons plus tard (**60** *inf.*) comment les solutions du système (3) s'expriment au moyen des coefficients; mais dès à présent nous pouvons ajouter plusieurs observations utiles à ce théorème.

I. *Le système* (3) *admet toujours quelque file de solutions,* ou, en d'autres termes, *est toujours possible; parmi ces files, figure nécessairement celle dont tous les éléments sont nuls.*

Quand $m = n$, cette file vanescente de solutions est la seule qui existe; le système est dit *déterminé*.

Quand $m < n$, il y a au contraire une *infinité* de files de solutions *distinctes*, c'est-à dire dans deux quelconques desquelles une inconnue au moins n'a pas des valeurs égales. On dit le système *indéterminé;* il admet toujours alors quelque file de solutions dont les valeurs ne sont pas toutes nulles : ce qui s'accorde avec le lemme du n° **11**.

II. Quand le système est indéterminé, les inconnues se partagent en deux groupes : l'un de $n-m$ qui sont tout à fait *indéterminées,* l'autre de m dont les valeurs s'expriment au moyen de celles des précédentes par les formules (5), qui effectuent ainsi la *résolution* du système proposé *par rapport à ces m dernières inconnues*. Ce groupe de m inconnues est caractérisé par la propriété de l'abaque carré de ses coefficients d'être invanescent, condition qui suffit pour assurer la possibilité d'un semblable partage des inconnues et de la résolution correspondante des équations (3). On peut ainsi exécuter ces opérations d'autant de manieres que l'on peut former d'abaques carrés invanescents avec m colonnes de l'abaque du système.

Suivant les circonstances, ce nombre peut varier de 1 à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m},$$

nombre de combinaisons m à m des n colonnes de cet abaque.

Il importe de remarquer que la condition précitée est nécessaire.

Effectivement si l'abaque carré des coefficients de $x, y, z, \ldots, s$, par exemple, est vanescent, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, une file invanescente en symptose avec lui par les colonnes. L'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$$

admet toutes les files de solution des proposées, parce qu'elle leur est agrégée (**27**); mais, comme les coefficients des m inconnues $x, y, z, \ldots, s$ y sont tous nuls, elle se réduit à

$$(6) \qquad \text{H}t + \ldots + \text{I}u + \text{J}v = 0$$

et les coefficients H, ..., I, J, induits des $n - m$ dernières colonnes de l'abaque du système (3) par la file invanescente considérée, ne peuvent tous s'évanouir, sans quoi ce système serait réductible, contrairement à l'hypothèse.

Le premier membre de cette équation n'étant pas nul identiquement, elle et, par suite, le système (3) ne peuvent être satisfaits par toutes les combinaisons de valeurs des $n - m$ inconnues $t, \ldots, u, v$.

III. La file générale des solutions du système (3) est indéterminée *dans son ensemble*, et cela d'une manière plus ou moins large selon la grandeur de la différence $n - m$. Mais il peut se faire que quelques inconnues y soient *individuellement* déterminées, c'est-à-dire ne soient jamais susceptibles chacune que d'une seule et même valeur.

Si cette particularité se présente pour une certaine inconnue, x par exemple, il faut qu'elle ne puisse faire partie d'aucun groupe de $n - m$ inconnues *indéterminées*, et, pour cela, que parmi les $n - 1$ colonnes formées dans l'abaque du système (3) par les coefficients des autres inconnues $y, z, \ldots, v$ il n'en existe aucun groupe de m formant un abaque carré invanescent (II); cette condition exige que l'abaque de ces $n - 1$ colonnes soit vanescent par les lignes (**25**). Si elle est remplie, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ une file invanescente en symptose avec chacune de ces $(n - 1)$ colonnes; les équations (3) induites par cette file donnent l'équation agrégée

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$$

qui se réduit à

$$A x = 0,$$

où A ne peut s'évanouir, car alors la file invanescente considérée serait aussi en symptose avec la première colonne de l'abaque de notre système, et cet abaque serait vanescent par les lignes, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de cette dernière équation que *x n'est effectivement susceptible que d'une seule valeur qui est zéro.*

51. *Toute file de n éléments agrégée à quelques files de solutions du système* (3) *est aussi une file de solutions, et si $n - m$ files de solutions forment un abaque invanescent, la file la plus générale de n éléments qui leur est agrégée est aussi la file la plus générale des solutions des équations dont il s'agit.*

L'introduction de $n - m$ paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, représentant par exemple les valeurs des $n - m$ inconnues indéterminées $t, \ldots, u, v$, permet évidemment de substituer aux formules (5) les formules équivalentes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
x &= \tau H'_1 + \ldots + \upsilon I'_1 + \varphi J'_1,\\
y &= \tau H'_2 + \ldots + \upsilon I'_2 + \varphi J'_2,\\
z &= \tau H'_3 + \ldots + \upsilon I'_3 + \varphi J'_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
s &= \tau H'_m + \ldots + \upsilon I'_m + \varphi J'_m,\\
t &= \tau.1 + \ldots + \upsilon.0 + \varphi.0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u &= \tau.0 + \ldots + \upsilon.1 + \varphi.0,\\
v &= \tau.0 + \ldots + \upsilon.0 + \varphi.1,
\end{aligned}\right.$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$-\frac{H_1}{A_1} = H'_1, \quad \ldots, \quad -\frac{J_m}{G_m} = J'_m.$$

On voit ainsi qu'une file quelconque de solutions est agrégée aux

$n-m$ lignes de l'abaque

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{cccccccccc} H_1 & H_2 & H_3 & \ldots & H_m & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_1 & I_2 & I_3 & \ldots & I_m & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0, \\ J_1 & J_2 & J_3 & \ldots & J_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1, \end{array}\right.$$

irréductible par les lignes, et même, en réduction apparente, ses $n-m$ dernières colonnes étant saillantes (**21**), et que les multiplicateurs d'agrégation sont $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$. On voit en même temps que, réciproquement, toute file agrégée à cet abaque par ses lignes, chacune de celles-ci en particulier, est une file de solutions.

Considérons maintenant k files particulières quelconques de solutions des équations (3); comme elles sont agrégées aux lignes de l'abaque (8), toute autre file qui leur est agrégée l'est aussi à cet abaque par les lignes (**7**) et constitue par suite une file de solutions.

Si $k=n-m$ et si l'abaque de ces files de solutions disposées en lignes est invanescent,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots\, s_1 & t_1 & \ldots\, u_1 & v_1, \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots\, s_2 & t_2 & \ldots\, u_2 & v_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n-m} & \ldots\, s_{n-m} & t_{n-m} & \ldots\, u_{n-m} & v_{n-m}, \end{array}\right.$$

il est nécessairement équivalent à l'abaque (8) par les lignes, parce qu'il en contient le même nombre en lui étant agrégé (**19**). Il en résulte que toute file de solutions est agrégée à ce dernier abaque parce qu'elle l'est à son équivalent (8).

En appelant donc $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$, $n-m$ paramètres absolument indéterminés, les formules

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} x = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m}, \\ y = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots + y_{n-m}\theta_{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v = v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}, \end{array}\right.$$

qui donnent pour $x, y, \ldots, v$ les éléments de toute file agrégée aux lignes de l'abaque (9), la file d'agrégation étant $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-m}$, fournissent d'une autre manière toutes les files de solutions du système (3). Elles ont les formules (7) pour forme particulière, caractérisée par cette seule circonstance que, dans celles-ci, l'abaque des coefficients des indéterminées est en invanescence apparente ; elles leur sont préférables, parce qu'elles n'établissent aucune distinction entre les diverses inconnues.

On observera en outre qu'elles donnent *une seule fois* chaque file de solutions. En effet, pour que les files de valeurs de $x, y, \ldots, v$ fournies par ces formules, pour les files $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_{n-m}$ et $\theta''_1, \theta''_2, \ldots, \theta''_{n-m}$ de valeurs particulières attribuées aux paramètres indéterminés, soient identiques élément à élément, il faut que l'on ait

$$x_1(\theta'_1 - \theta''_1) + x_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + x_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0,$$
$$y_1(\theta'_1 - \theta''_1) + y_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + y_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_1(\theta'_1 - \theta''_1) + v_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + v_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0,$$

et par suite

$$\theta'_1 - \theta''_1 = \theta'_2 - \theta''_2 = \ldots = \theta'_{n-m} - \theta''_{n-m} = 0,$$

c'est-à-dire que les files de valeurs des paramètres soient identiques. Effectivement, ces conditions constituent entre les $n-m$ différences $\theta'_1 - \theta''_1, \ldots$, n équations linéaires et homogènes dont l'abaque est invanescent par ses colonnes qui sont précisément les lignes de l'abaque (9). Un groupe au moins de $n-m$ de ces équations a donc un abaque carré invanescent (**25**), et par suite (**29**) ne peuvent être satisfaites que par des valeurs toutes nulles de ces différences.

On peut nommer *cardinales* des files de solutions au nombre de $n-m$ et formant un abaque invanescent tel que (9), au moyen desquelles on peut exprimer immédiatement toutes les solutions d'une même autre file quelconque, en fonction linéaire et homogène de $n-m$ paramètres indéterminés. Il existe une infinité d'abaques de solutions cardinales : cela résulte de ce que nous verrons plus loin (**71** *inf.*) ; mais tous sont équivalents par les lignes et fournissent naturellement

pour le système (3) le même ensemble indéfini de files de solutions.

Une réciprocité remarquable lie un abaque de solutions cardinales à celui du système d'équations linéaires auquel il appartient (84 et suiv. *inf.*).

52. *Un système d'équations linéaires et homogènes qui admet toutes les solutions du système irréductible (3) lui est nécessairement agrégé.*

Une équation quelconque de ce nouveau système admettant en particulier les solutions d'un abaque cardinal tel que (9), ses coefficients a', b', ..., j' sont des solutions du système irréductible des $n-m$ équations linéaires et homogènes irréductibles aux n inconnués $a, b, c, \ldots, i, j$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 a + y_1 b + z_1 c + \ldots + v_1 j = 0, \\ x_2 a + y_2 b + z_2 c + \ldots + v_2 j = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-m} a + y_{n-m} b + z_{n-m} c + \ldots + v_{n-m} j = 0, \end{array}\right.$$

et, pour la même raison, les m lignes de l'abaque du système proposé (3) sont des files de solutions des équations (11). Mais cet abaque étant invanescent par hypothèse, les solutions qui en forment les lignes sont cardinales; donc (51) la file $a'\,b'\ldots j'$ leur est agrégée : ce qu'il fallait établir.

53. *Deux systèmes irréductibles d'équations linéaires et homogènes qui ont les mêmes files de solutions sont équivalents*, car, en vertu de ce qui précède, chacun d'eux est agrégé à l'autre.

Les deux théorèmes précédents s'étendent facilement à des systèmes réductibles, par la considération des systèmes réduits équivalents. Ce sont les réciproques de ceux des nos (27), (28).

54. Considérons maintenant un système de m équations linéaires, mais non homogènes, entre les n mêmes inconnues $x, y, \ldots, v$,

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + \ldots + i_m u + j_m v + k_m = 0. \end{array}\right.$$

En écrivant $k_1 . 1$, $k_2 . 1$, ..., $k_m . 1$ les *termes connus* de ces équations $k_1, k_2, \ldots, k_m$, on aperçoit de suite que leurs files de solutions peuvent s'obtenir en prenant simplement les n premiers éléments de celles des files de solutions des m équations linéaires et homogènes aux $n+1$ inconnues $x, y, \ldots, v, w$

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 w = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + \ldots + i_m u + j_m v + k_m w = 0, \end{array}\right.$$

dans lesquelles l'inconnue w a pour valeur 1.

Nous appellerons *abaque* du système non homogène (12) celui du système homogène correspondant (13) qui a m lignes et $n+1$ colonnes. Cela posé, en combinant la remarque précédente avec la théorie des systèmes homogènes, on obtient immédiatement les propositions suivantes :

I. *Le système* (12) *admet les solutions de tout autre de même nature auquel il est agrégé*, c'est-à-dire à l'abaque duquel le sien est agrégé par les lignes (**27**).

En conséquence, *deux semblables systèmes ont les mêmes files de solutions s'ils sont équivalents*, c'est-à-dire si leurs abaques le sont par les lignes (**28**).

La résolution du système (12) peut donc s'opérer par celle d'un système irréductible équivalent (**20**); nous pourrons donc supposer désormais que ce système est irréductible, ce qui exige en particulier que l'on ait $m \leqq n+1$.

II. *Quand m est $= n+1$, le système irréductible* (12) *est impossible*, c'est-à-dire *n'admet aucune file de solutions*.

Dans ce cas, en effet, la seule file de solutions du système homogène auxiliaire (13) est vanescente (**29**), et la valeur de w ne peut pas y être égale à 1.

III. *Quand $m \leqq n$, le système irréductible* (12) *est possible ou impossible suivant que l'abaque partiel formé dans le sien par les m colonnes de coefficients des inconnues est invanescent ou vanescent.*

Si l'abaque partiel en question est invanescent, le système auxiliaire (13) peut être résolu en attribuant des valeurs arbitraires à quelque groupe de $n+1-m$ inconnues comprenant α (25), (29), et les n premiers éléments de toute file de solutions dans laquelle α aura pour valeur 1 formeront une file de solutions du système proposé (12).

Si au contraire cet abaque partiel est vanescent, le système auxiliaire (13) n'admet aucune file de solutions dans laquelle α n'ait pas une valeur nulle (**30**, III), partant non $=1$, et le proposé est impossible.

IV. *Dans le cas où $m=n$, le système (12), s'il est irréductible et possible, admet une seule file de solutions, ou, en d'autres termes, est déterminé.*

Pour résoudre ce système, il faut chercher les files de solutions du système auxiliaire (13) dans lesquelles $\alpha=1$. Ce système ayant alors des inconnues en nombre inférieur d'une unité seulement, à celui des équations qui le composent, une seule de ces inconnues, pour laquelle l'hypothèse permet de choisir α, est indéterminé (**30**, II). En le résolvant dans cette hypothèse par des formules analogues à (5), puis y posant $\alpha=1$, les valeurs de toutes les autres inconnues, c'est-à-dire des inconnues du système proposé (12), se trouvent exactement déterminées.

V. *Dans le cas où $m<n$, on peut attribuer des valeurs arbitraires à tout groupe de $n-m$ inconnues tellement choisies que l'abaque carré des coefficients des m autres sont invanescent, après quoi les valeurs correspondantes de ces m autres inconnues sont exactement déterminées.*

Supposons, par exemple, que l'abaque carré des coefficients des m inconnues $x, y, z, \ldots, s$ soit invanescent; on peut alors résoudre le système auxiliaire (13) par rapport à ces m inconnues, au moyen de formules analogues à (5) qui contiennent comme indéterminées les $n+1-m$ autres $t, \ldots, u, v, \alpha$. En y posant $\alpha=1$, il ne reste plus comme indéterminées que les $n-m$ inconnues $t, \ldots, u, v$ au moyen des valeurs desquelles les formules ainsi modifiées expriment les valeurs correspondantes de $x, y, z, \ldots, s$.

VI. *Les mêmes choses restant posées, on obtient encore les éléments de*

la file générale des solutions du système (12) *en ajoutant respectivement à ceux d'une file particulière quelconque de solutions les éléments correspondants de la file générale de solutions du système homogène* (3), *auquel le proposé se réduit par la suppression des termes connus* $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Si $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0, v_0$ est une file particulière de solutions des équations (12), en adjoignant à cette file disposée en ligne celles d'un abaque de solutions cardinales du système (3), puis à cet abaque de $(m+1)$ lignes et de n colonnes une colonne ayant pour éléments 1 suivi de $n-m$ zéros, on obtient l'abaque

$$(14)\quad \left|\begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 & \ldots & u_0 & v_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \ldots & u_1 & v_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots & u_2 & v_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n-m} & \ldots & u_{n-m} & v_{n-m} & 0 \end{matrix}\right|$$

dont les lignes constituent dans leur ensemble des files de solutions cardinales du système auxiliaire (13).

Effectivement les lignes de cet abaque sont (en nombre égal à $n+1-m$ excès du nombre des inconnues sur celui des équations dans le système (13), et chacune d'elles est évidemment une file de solutions de ce système. D'autre part, cet abaque est invanescent par les lignes; car dans une file $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ en symptose avec lui par les colonnes, il faut d'abord que l'on ait $\lambda_0 = 0$ à cause de la symptose partielle qui doit avoir lieu avec la dernière colonne de l'abaque; il faut ensuite que les $n-m$ autres éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ soient tous nuls. Car, à cause de la nullité de λ_0, la file de $n-m$ éléments qu'ils forment doit être en symptose avec les colonnes de l'abaque réduit à ses $n-m$ dernières lignes, c'est-à-dire avec celles de l'abaque (9) qui est essentiellement invanescent. Ce qui revient à dire que l'abaque (14) ne peut être en symptose par ses colonnes qu'avec une file vanescente.

Cela posé, si au moyen des éléments de cet abaque et de $n+1-m$ paramètres indéterminés $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$ on exprime les solutions du système (13) par des formules analogues à (10), et si l'on fait $\theta_0 = 1$, ce qui est nécessaire pour que w soit $= 1$, on trouvera bien, pour

celles du système proposé (12), les formules spécifiées implicitement dans notre énoncé :

$$x = x_0 + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m},$$
$$y = y_0 + y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots + y_{n-m}\theta_{n-m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$v = v_0 + v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}.$$

Ces formules fournissent une fois seulement chacune des files de solutions du système (12) ; ce dont on s'assure en raisonnant comme nous l'avons fait par les formules (10).

34 *bis*. Nous revenons actuellement aux équations linéaires et homogènes, pour chercher comment leurs solutions s'expriment au moyen des coefficients. Mais auparavant il convient d'étudier sommairement des expressions très remarquables qui se présentent dans cette question, ce qui en allégera notablement la solution.

En considérant comme autant de variables indépendantes les éléments d'un abaque donné que nous décomposerons par la pensée en files parallèles d'une direction où elles ne sont pas moins longues que les files de l'autre sens, nous nommerons *covanescent* de cet abaque toute fonction des éléments, linéaires et homogènes par rapport à ceux de chacune des files en question (considérés isolément), qui jouit de la propriété de s'évanouir pour tout système de valeurs des éléments rendant l'abaque vanescent par les files dont il s'agit.

Nous réduirons chaque covanescent de manière à lui donner la forme d'une somme de monômes dissemblables par rapport aux éléments de l'abaque, ayant pour coefficients des quantités indépendantes de ces éléments, et nous supprimerons naturellement tout terme qui serait pourvu d'un coefficient nul.

(1) Pour fixer les idées, nous considérerons l'abaque (15) écrit plus loin, dont nous supposerons la largeur n au moins égale à la hauteur m. Cela posé, *chaque terme d'un covanescent V de cet abaque est le produit de son coefficient par m éléments situés tous sur quelque même diagonale*.

Comme F est linéaire et homogène par rapport aux éléments de chaque ligne de l'abaque considérés isolément, un quelconque de ses termes contient, à titre de facteurs, m éléments de l'abaque, ni plus ni moins, et ces éléments sont notés par les m indices 1, 2, 3, ..., m tous différents les uns des autres. Les m lettres servant à la notation des mêmes éléments sont aussi toutes différentes.

Dans le cas contraire, en effet, il existerait dans F quelque terme ayant pour facteurs des éléments appartenant dans leur ensemble à moins de m colonnes de l'abaque, aux $m' < m$ premières par exemple. En appelant alors P le groupe formé par les termes de cette espèce et Q l'ensemble des autres termes, ayant ainsi pour facteur un élément au moins des $n - m'$ dernières colonnes, on aurait

$$F = P + Q,$$

d'où $F_0 = P$, F_0 désignant ce que devient F quand on réduit à zéro tous les éléments de ces $n - m'$ colonnes, car alors tous les termes de Q s'évanouissent.

Mais cette hypothèse rend l'abaque vanescent par les lignes, et par suite $F_0 = 0$; car, à cause de $m' < m$, on peut assigner quelque file invanescente de m éléments en symptose avec ses m' premières colonnes (**11**) et en fait avec toutes, puisque les $n - m'$ autres sont devenues vanescentes. On devrait donc avoir aussi $P = 0$, quelles que fussent les valeurs des éléments entrant dans cette expression; or c'est impossible, puisque nous supposons F composé de termes dissemblables à coefficients non nuls.

Une même lettre ou un même indice ne pouvant ainsi figurer deux fois dans la notation des m éléments qui entrent dans chaque terme de F, ces m éléments appartiennent nécessairement à une même diagonale de l'abaque (15).

II. *Quand l'abaque* (15) *est carré, tout covanescent* F *relatif à ses lignes est aussi un covanescent relatif à ses colonnes.*

Puisque chaque terme de F contient en facteurs les premières puissances seulement de m éléments notés par m lettres essentiellement différentes (I), et que la notation de la totalité des éléments comporte seulement m lettres à cause de $n = m$, une colonne donnée quelconque

de l'abaque fournit toujours, comme facteur, à un terme quelconque de F, quelqu'un de ses éléments à la première puissance, mais un seul. Notre fonction est donc aussi linéaire et homogène par rapport aux éléments de chaque colonne de l'abaque, considérés isolément. Enfin, quand l'abaque est vanescent par les colonnes, il l'est aussi par les lignes, puisqu'il est carré (**13**), et F s'évanouit.

55. *Le système* (3) *étant irréductible et indéterminé, toutes ses solutions sont données par les formules*

$$x = X, \quad y = Y, \quad \ldots, \quad v = V,$$

où X, Y, ..., V *sont des fonctions des mn éléments de son abaque*

$$(15) \qquad \left| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & i_1 & j_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & i_m & j_m, \end{matrix} \right.$$

qui contiennent d'une manière linéaire et homogène certains paramètres indéterminés. D'autre part, ces fonctions sont d'une nature telle, que l'induit

$$(16) \qquad a_0 X + b_0 Y + \ldots + j_0 V$$

de leur file et de celle de n nouveaux éléments indéterminés $a_0, b_0, \ldots, j_0$ *est un covanescent de l'abaque suivant à* $m+1$ *lignes et à n colonnes*

$$(17) \qquad \left| \begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & \ldots & g_0 & h_0 & \ldots & j_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 & h_2 & \ldots & j_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & j_m \end{matrix} \right.$$

I. *Notre théorème a lieu quand le système* (3) *contient une seule équation, sa première par exemple.*

La file des coefficients de cette équation en comprend un au moins.

a_1 pour fixer les idées, qui n'est pas nul parce qu'elle est invanescente. En raisonnant donc comme au n° **11**, on trouvera que toutes les solutions s'obtiennent en attribuant à $y, z, \ldots, v$ des valeurs quelconques et à x la valeur correspondante

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z - \ldots - \frac{j_1}{a_1}v.$$

Mais, en posant $\frac{y}{a_1} = \eta$, $\frac{z}{a_1} = \zeta$, $\ldots$, $\frac{v}{a_1} = \varphi$, $\eta, \zeta, \ldots, \varphi$ seront, comme $y, z, \ldots, v$, des quantités tout à fait arbitraires, et les solutions dont il s'agit seront aussi données par les formules

$$\begin{aligned} x &= -b_1\eta - c_1\zeta - \ldots - j_1\varphi, \\ y &= \quad a_1\eta, \\ z &= \qquad\quad a_1\zeta, \\ \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v &= \qquad\qquad\qquad\qquad a_1\varphi, \end{aligned}$$

dont tous les seconds membres sont bien linéaires et homogènes par rapport aux paramètres indéterminés $\eta, \zeta, \ldots, \varphi$. D'ailleurs ils vérifient évidemment l'équation proposée, quelles que soient les valeurs de ces paramètres, et aussi celles des coefficients $a_1, b_1, \ldots, j_1$.

Maintenant si l'abaque

$$\begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & \ldots & j_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \end{matrix}$$

devient vanescent par les lignes, il arrivera de deux choses l'une : ou bien sa seconde ligne sera vanescente, ou bien elle ne le sera pas, mais alors la première lui sera agrégée (**14**). Dans le premier cas, l'expression (16) s'évanouit, parce que, en fait, les expressions ci-dessus de $x, y, \ldots, v$ s'évanouissent toutes. Dans le second cas, elle s'évanouit encore, parce que l'équation

$$a_0x + b_0y + \ldots + j_0v = 0$$

est agrégée à la proposée et en admet par suite toutes les files de solutions (27). D'ailleurs, cette expression est évidemment linéaire et homogène par rapport aux éléments, soit de l'une, soit de l'autre ligne de l'abaque bilinéaire ci-dessus.

II. *Notre théorème est vrai pour le système considéré (3), s'il l'est pour un autre de même nature contenant $m-1$ équations seulement.*

Notre système étant irréductible, il y a certainement m inconnues $x, y, z, \ldots, s$ dont les coefficients

(18) $$\begin{cases} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m \end{cases}$$

forment un abaque carré invanescent (25). L'abaque laissé dans ce dernier par la suppression de sa première colonne est donc invanescent aussi (par les colonnes) (12). Le système des $m-1$ équations linéaires et homogènes aux m inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

(19) $$\begin{cases} b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_m\lambda_m = 0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_m\lambda_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + \ldots + g_m\lambda_m = 0 \end{cases}$$

est ainsi irréductible et indéterminé, et, par hypothèse, on obtiendra une file donnée de ses solutions, en particulier une de celles qui sont invanescentes

(20) $$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

en prenant les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans quelque covanescent ψ de l'abaque carré

(21) $$\begin{cases} \alpha_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1, \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m & b_m & c_m & \ldots & g_m. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les équations (3) par la file (20). Les coefficients de $y, z, \ldots, s$ dans le résultat sont tous nuls à cause des équations (19). Quant à ceux des autres inconnues $x, t, \ldots, u, v$, ils sont évidemment les expressions $(abc\ldots g)$, $(hbc\ldots g)$, $\ldots$, $(ibc\ldots g)$, $(jbc\ldots g)$ dans lesquelles ψ se transforme par la substitution faite à α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de la première colonne de l'abaque (15), de la $(m+1)^{\text{ième}}, \ldots$, de la $(n-1)^{\text{ième}}$ et de la $n^{\text{ième}}$ respectivement. On obtient ainsi l'équation

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(abc\ldots g)x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s \\ &\qquad + (hbc\ldots g)t + \ldots + (ibc\ldots g)u + (jbc\ldots g)v = 0, \end{aligned}\right.$$

et $(abc\ldots g)$ n'est pas nul, car autrement l'abaque (18) aurait sa première ligne en symptose, comme les $m-1$ autres, avec la file invanescente (20) et il serait vanescent contrairement à ce qui a lieu.

L'expression $(abc\ldots g)$ est évidemment un covanescent de l'abaque (18), puisqu'elle est formée avec ses éléments exactement comme ψ, covanescent de l'abaque (21), avec ceux de ce dernier. Les $m-1$ expressions $(aac\ldots g)$, $(acc\ldots g)$, $(agc\ldots g)$ déduites de $(abc\ldots g)$, en y substituant successivement aux éléments de la seconde colonne de l'abaque (18) ceux de la première, de la troisième, etc., et de la $m^{\text{ième}}$, sont donc toutes nulles puisque ce sont alors des covanescents d'abaques carrés, dans chacun desquels respectivement la seconde colonne est identique, partant agrégée, à la première, à la troisième, ..., à la $m^{\text{ième}}$, c'est-à-dire tous vanescents. Il en résulte que l'induction des équations (3) par les coefficients de $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dans $(abc\ldots g)$, ordonné par rapport à ces éléments, donne une équation de la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &0.x + (abc\ldots g)y + 0.z + \ldots + 0.s \\ &\qquad + (ahc\ldots g)t + \ldots + (aic\ldots g)u + (ajc\ldots g)v = 0, \end{aligned}\right.$$

car, en induisant la file des coefficients dont il s'agit par les colonnes de l'abaque (18) qui sont notées par les lettres $b, h, \ldots, i, j$, on reproduit d'abord évidemment l'expression $(abc\ldots g)$, puis ensuite ce en quoi la transforment les substitutions à la file d'éléments $b_1, b_2, \ldots, b_m$, des $(m+1)^{\text{ième}}, \ldots, (n-1)^{\text{ième}}, n^{\text{ième}}$ colonnes de l'abaque (18).

En poursuivant de même avec les $3^{\text{ième}}, \ldots, m^{\text{ième}}$ colonnes de l'abaque (18) successivement, on obtient les $m-2$ autres équations analogues

$$\begin{gathered}
0.x + 0.y + (abc\ldots g)z + \ldots + 0.s \\
+ (abh\ldots g)t + \ldots + (abi\ldots g)u + (abj\ldots g)v = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0.x + 0.y + 0.z + \ldots + (abc\ldots g)s \\
+ (abc\ldots h)t + \ldots + (abc\ldots i)u + (abc\ldots j)v = 0,
\end{gathered}$$

qui, elles, ainsi que (22) et (23), sont toutes agrégées au système (3). En outre, ce système de m équations est en réduction apparente à cause de $(abc\ldots g)$ non $= 0$; il est donc équivalent au proposé (**19**), et ses solutions sont identiques à celles de celui-ci (**28**).

Ce système est de même nature que (4), à part les notations, et cette circonstance essentielle que, maintenant, nous avons

$$A_1 = B_2 = C_3 = \ldots = G_m = (abc\ldots g).$$

Les solutions seront donc fournies par les formules (5) ou bien par les formules équivalentes [1]

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
x &= -(hbc\ldots g)\tau - \ldots - (ibc\ldots g)\upsilon - (jbc\ldots g)\varphi, \\
y &= -(ahc\ldots g)\tau - \ldots - (aic\ldots g)\upsilon - (ajc\ldots g)\varphi, \\
z &= -(abh\ldots g)\tau - \ldots - (abi\ldots g)\upsilon - (abj\ldots g)\varphi, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t &= (abc\ldots g)\tau, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u &= \qquad\qquad (abc\ldots g)\upsilon, \\
v &= \qquad\qquad\qquad\qquad (abc\ldots g)\varphi,
\end{aligned}\right.$$

qu'on en déduit en exprimant les $n-m$ inconnues indéterminées

---

[1] On peut supposer que les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ sont certains *déterminants* de l'abaque (15) (**57** *inf.*).

$t, \ldots, u, v$ au moyen des paramètres indéterminés en nombre égal $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, par les $n-m$ dernières des précédentes formules, ce qui ne restreint aucunement l'indétermination de ces inconnues à cause de $(abc\ldots g)$ non $= 0$.

Il est essentiel de remarquer que ces formules donnent, pour les inconnues, des valeurs qui satisfont au système (3), *quels que soient, et ses coefficients, et les valeurs de* $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, *et aussi le covanescent* ψ *de l'abaque carré* (18) *qui a servi à les obtenir*. Pour s'en assurer, il suffit évidemment de vérifier que les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les résultats qu'on obtient en portant ces expressions de $x, y, \ldots, v$ dans les premiers membres des équations (3), se réduisent tous à zéro.

Considérons, par exemple, la première équation et le coefficient du paramètre τ, savoir, au signe près,

$$a_1(hbc\ldots g)+b_1(ahc\ldots g)$$
$$+c_1(abh\ldots g)+\ldots+g_1(abc\ldots h)-h_1(abc\ldots g).$$

Cette expression est évidemment linéaire et homogène par rapport à $h_1, h_2, \ldots, h_m$, et h_1 y a pour coefficient

$$[a_1 A_1+b_1 B_1+c_1 C_1+\ldots+g_1 G_1]-(abc\ldots g),$$

$A_1, B_1, \ldots, G_1$ représentant les coefficients de $a_1, b_1, \ldots, g_1$ dans le développement de $(abc\ldots g)$, par suite zéro, puisque le polynôme entre crochets régénère $(abc\ldots g)$.

D'autre part, si l'on prend k non $= 1$, et si l'on nomme $A_k, B_k, \ldots, G_k$ les coefficients de $a_k, b_k, \ldots, g_k$ dans le développement de $(abc\ldots g)$, le coefficient de h_k sera

$$a_1 A_k+b_1 B_k+\ldots+g_1 G_k.$$

Or cette expression est un covanescent de l'abaque carré vanescent formé en remplaçant la $k^{\text{ième}}$ ligne de (18) par la file $a_1, b_1, \ldots, g_1$. Elle est donc nulle, et ainsi les coefficients de $h_2, h_3, \ldots, h_m$ s'évanouissent tous comme celui de h_1.

Les seconds membres des formules (24) sont tous linéaires et homogènes par rapport aux paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$. En

outre, et par définition, le covanescent $(abc \ldots g)$ étant linéaire et homogène par rapport aux éléments de chacune des lignes de son abaque (18), il est évident, d'après la manière dont les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ se déduisent de ce covanescent, que la même propriété appartient à tous ces coefficients, par suite à chacun des seconds membres des formules (24) ainsi qu'à l'expression (16), relativement aux éléments d'une même ligne quelconque de l'abaque (15).

Supposons enfin que l'abaque (17) devienne vanescent par les lignes; alors celui de ses m dernières lignes le sera lui-même, sinon sa première ligne sera agrégée à ces m autres (**14**).

Dans le premier cas, m colonnes quelconques de l'abaque (15) forment évidemment un abaque vanescent ; $(abc \ldots g)$ s'évanouit donc et avec lui, simultanément, tous les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les formules (24), chacun d'eux, au signe près, étant composé avec quelque groupe de m colonnes de (15) comme $(abc \ldots g)$ l'est avec les m premières. Les seconds membres des formules (24) et avec eux l'expression (16) se réduisent donc à zéro.

Dans le second cas, l'équation

$$a_0 x + b_0 y + \ldots + j_0 v = 0$$

est agrégée au système proposé (3), partant satisfaite par toutes ses files de solutions (**27**).

L'expression (16) s'évanouit donc dans les deux hypothèses, et, comme elle est linéaire et homogène par rapport aux éléments de toute ligne de (17), elle est un covanescent de cet abaque, ce qui restait à prouver.

III. *Notre théorème est donc vrai dans tous les cas*, puisqu'il a été démontré quel que soit n pour $m = 1$ (I), et que le raisonnement ci-dessus permet de l'étendre successivement aux cas de

$$m = 2, 3, \ldots, n - 1.$$

56. *Réciproquement, les coefficients* X, Y, ..., V *de* $a_0, b_0, \ldots, j_0$ *dans un covanescent quelconque de l'abaque* (17) *sont des solutions du système* (3).

Effectivement l'expression

$$a_1 X + b_1 Y + \ldots + j_1 V$$

est évidemment un covanescent de l'abaque

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 & \ldots & j_2 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m \end{matrix}$$

déduit de (17) par la répétition de sa seconde ligne à la place de sa première. Elle est donc nulle, puisque ce dernier abaque est en symptose par les colonnes avec la file invanescente ayant pour éléments $+1$ et -1 suivis de $m-1$ zéros, partant vanescent par les lignes. En d'autres termes, les quantités X, Y, ..., V satisfont à la première équation du système (3), et l'on démontrerait de même qu'elles satisfont aussi à ses $(m-1)$ autres équations.

57. La recherche des solutions de notre système, exprimées en fonction de ses coefficients, *revient ainsi à celle du covanescent le plus général de l'abaque* (17), puisque l'expression (16) ne peut être qu'un covanescent de cet abaque (**55**).

Avant de procéder à cette recherche, remarquons que *les formules* (24) *font aussi dépendre les mêmes solutions de la formation d'une simple fonction covanescente non nulle de l'abaque carré* (18) *des coefficients de m inconnues choisies de telle sorte que cet abaque soit invanescent* (**25**).

Ces deux méthodes s'équivalent au fond, mais la seconde est évidemment la plus simple.

Déterminants.

58. Nous aurons incessamment besoin de certains principes d'Analyse combinatoire, que nous allons tout d'abord exposer.

I. On nomme *permutations* de plusieurs objets déterminés quelcon-

ques les divers groupes que l'on en peut former, en les alignant tous les uns à la suite des autres de toutes les manières possibles. On sait que *le nombre des permutations différentes de m objets donnés est égal au produit* $1.2.3...m$.

II. Dans une permutation donnée de deux ou plusieurs objets, on nomme *une transposition* l'opération consistant à déplacer deux objets déterminés, de manière à transporter chacun d'eux à la place que l'autre occupait auparavant.

Si les objets considérés sont au nombre de m, le nombre des transpositions distinctes que l'on peut concevoir parmi eux est égal à $\frac{m(m-1)}{1.2}$, nombre des manières d'en choisir deux.

III. *Étant données deux permutations quelconques de certains objets, on peut toujours faire naître la seconde de la première, en exécutant dans celle-ci des transpositions convenables.*

La démonstration est assez facile pour que nous puissions la supprimer.

IV. Il y a visiblement une infinité de manières de passer ainsi, par des transpositions successives, d'une permutation donnée à une autre, différente ou non, des mêmes objets; mais, *quelle que soit la manière d'opérer, le nombre des transpositions pouvant ainsi métamorphoser une permutation donnée dans une autre est de parité invariable*, c'est-à-dire toujours pair ou toujours impair, suivant la nature relative des permutations considérées.

1° *Une transposition quelconque équivaut toujours à un nombre impair de transpositions simples*, c'est-à-dire ne déplaçant chacune que deux objets contigus dans la permutation considérée.

Soient $\mathfrak{G}$ et ρ les deux objets à transposer, et supposons qu'il y en ait q entre eux dans la permutation considérée $..\mathfrak{G}...\rho....$ Il est clair qu'en transposant successivement $\mathfrak{G}$ avec l'objet placé après lui, puis avec l'objet suivant ..., puis avec celui qui précède ρ, puis enfin avec ρ, ce qui fait $q+1$ transpositions simples, la permutation considérée deviendra $...|...\rho\mathfrak{G}...$, le trait vertical indiquant la place qu'occupait $\mathfrak{G}$ dans la permutation primitive.

Si maintenant, dans cette nouvelle permutation, on transpose suc-

cessivement ρ avec l'objet placé avant lui, puis avec celui qui précède celui-ci, ..., puis enfin avec l'objet placé immédiatement à la droite du trait vertical, ce qui constitue q transpositions simples, la permutation deviendra $\ldots\rho\ldots\theta\ldots$, c'est-à-dire ce que devient la permutation primitive par la seule transposition des objets θ et ρ.

Notre lemme est donc démontré, puisque le nombre total des transpositions simples qui ont été exécutées est l'impair $2q+1$.

2° *Si certaines transpositions simples ne produisent aucun changement dans une permutation, leur nombre est essentiellement pair.*

La chose est évidente quand la permutation contient deux objets seulement, car chacun d'eux revient à sa place ou n'y revient pas selon qu'il a été transposé avec l'autre un nombre pair (o compris) ou un nombre impair de fois, transpositions qui toutes sont forcément simples.

Il nous suffit donc de prouver que, si elle est vraie quand il y a m objets dans la permutation, elle l'est encore quand il y en a $m+1$. A cet effet, choisissons un quelconque θ des objets dont il s'agit, et, parmi les transpositions considérées, distinguons celles qui déplacent θ et celles qui, le laissant immobile, déplacent simultanément deux des m autres objets.

Toutes les transpositions considérées étant simples, chacune de celles du premier genre fait marcher θ d'un seul rang en avant ou en arrière, et, par suite, comme leur ensemble ramène θ à sa place primitive, leur nombre est nécessairement pair. En outre, aucune de ces transpositions ne déplace les autres objets les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire abstraction faite de θ; en d'autres termes, si, avant et après l'une d'elles, on supprimait θ en rapprochant au besoin les deux fragments de la permutation qui sont séparés par θ, on obtiendrait deux permutations identiques des autres objets.

La disposition relative de ces autres objets n'est donc modifiée que par les transpositions du second genre; elles sont donc aussi en nombre pair en vertu de l'hypothèse, puisque ces objets sont au nombre de m seulement et que les transpositions dont il s'agit les ramènent à la même disposition relative.

Les transpositions simples du second genre étant en nombre pair comme celles du premier, le nombre total des transpositions est pair aussi, ce qu'il fallait prouver.

3° *Des transpositions de nature quelconque qui ne produisent aucun changement dans une permutation donnée sont aussi en nombre pair.*

Soient effectivement n', n'', ..., $n^{k)}$ les nombres tous impairs de transpositions simples dont les ensembles équivalent respectivement à chacune des k transpositions considérées (1°). Leur somme

$$n' + n'' + \ldots + n^{k)}$$

est paire (2°), puisque l'ensemble de toutes ces transpositions simples ne produit aucun changement dans la permutation considérée. Le nombre k est donc pair, sans quoi la somme dont il s'agit serait nécessairement impaire.

4° Soient maintenant P_1, P_2 deux permutations des objets considérés, dont la première se métamorphose dans la seconde par l'un ou l'autre des deux groupes $(t)'$, $(t)''$ de n' et n'' transpositions, et appelons $''(t)$ un nouveau groupe de n'' transpositions formé avec celles du groupe $(t)''$ exécutées dans l'ordre inverse. Il est évident que les transpositions $(t)''$ et $''(t)$ exécutées successivement sur une permutation quelconque n'y produisent aucun changement, car l'effet de celles du premier groupe est visiblement détruit par celles du second.

Maintenant l'exécution successive sur la permutation P_1 des transpositions $(t)'$ et $''(t)$ n'y produit aucun changement; car le premier groupe $(t)'$, changeant P_1 en P_2, y produit le même effet que le groupe $(t)''$, et nous venons de voir que les transpositions $(t)''$ et $''(t)$ laissent invariable toute permutation. Donc (2°) $n' + n''$, nombre total des transpositions $(t)'$ et $''(t)$, est pair; les nombres n' et n'' sont donc ou tous deux pairs (0 compris) ou tous deux impairs.

Il résulte implicitement de notre raisonnement que *le nombre des transpositions nécessaires pour transformer* P_1 *en* P_2 *est de même parité que celui des transpositions qui peuvent transformer* P_2 *en* P_1.

V. Comparons toutes les permutations de m objets à l'une d'elles P choisie arbitrairement; formons-en deux classes (C)' et '(C) contenant respectivement celles pouvant se déduire de P par des nombres pairs (0 compris) et impairs de transpositions, et soient R, S deux permutations quelconques des mêmes objets, pouvant être déduites de P au moyen de r, s transpositions respectivement

Si l'on peut passer de R à S au moyen de t transpositions, inversement, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, on pourra passer de S à R au moyen de t transpositions aussi. En outre, on peut passer encore de P à S par l'intermédiaire de R, c'est-à-dire par $r+t$ transpositions; il en résulte (IV) que s et $r+t$ sont de même parité. Si donc R, S appartiennent à une même classe, les entiers r, s sont de même parité, et t est un nombre pair; sinon r, s sont de parité différente, et t est impair. On en conclut immédiatement que *le partage en deux classes des* $1.2.3\ldots m$ *permutations de* m *objets donne les mêmes résultats, quelle que soit la permutation type* P *au moyen de laquelle on l'a opéré.*

Finalement, *les nombres des permutations contenues dans chaque classe sont égaux l'un à l'autre, par suite à* $\frac{1.2\ldots m}{2}$, car une même transposition (nombre impair) exécutée sur toutes les permutations de la classe (C)' en donne d'autres en nombre égal, qui sont toutes distinctes les unes des autres et appartiennent à la classe '(C). Il en résulte que la classe '(C) contient au moins autant de permutations que la classe (C)', et l'on prouve de même que celle-ci n'en contient pas moins que l'autre.

59. Dans l'abaque

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & j_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m, \end{array}\right.$$

à m lignes et $n \geq m$ colonnes, on obtient les éléments d'une même diagonale quelconque, en prenant quelque combinaison de m des n lettres $a, b, c, \ldots, j$ et les affectant, d'une manière quelconque, des m indices $1, 2, 3, \ldots, m$. Nous appellerons *familles* les divers groupes formés chacun par les diagonales dont les éléments sont notés par les mêmes lettres; il y a évidemment autant de familles que de combinaisons de n lettres m à m, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$.

Si maintenant, dans les diagonales d'une même famille, on écrit les éléments d'une manière telle, que les lettres servant à leur notation

soient, pour toutes, rangées dans le même ordre, les notations de ces diagonales ne différeront que par l'ordre de succession des indices. Il y a donc autant de diagonales distinctes dans chaque famille que de permutations de m indices, c'est-à-dire $1.2.3\ldots m$.

Ainsi, dans une même famille, on peut passer de la notation d'une diagonale à celle d'une autre quelconque, en exécutant des transpositions convenables sur sa permutation d'indices (les lettres restant immobiles). Chaque famille se partage donc naturellement en deux *classes opposées*, contenant chacune $\frac{1.2\ldots m}{2}$ diagonales dont les notations de deux quelconques se métamorphosent l'une en l'autre par un nombre pair de transpositions d'indices (**38**, V).

Quant au nombre total des diagonales de l'abaque (1), il est égal à $n(n-1)\ldots(n-m+1)$, produit du nombre des familles par celui des diagonales contenues dans chacune.

40. *Le covanescent le plus général* F *de l'abaque* (1) *s'obtient en ajoutant les produits des éléments de chacune des diagonales, multipliés respectivement par des paramètres absolument indéterminés, sauf la restriction d'être égaux pour tous les produits qui proviennent de diagonales d'une même famille et d'une même classe, égaux encore, mais de signes contraires, pour deux produits provenant de diagonales de classes opposées dans une même famille.*

Si l'abaque (1) n'a qu'une ligne, notre théorème est évident, car la règle posée conduit à la fonction linéaire et homogène la plus générale des éléments de cette ligne, qui est évidemment le covanescent cherché.

Sinon, comme nous savons déjà (**34** *bis*, I) que, F ayant été ramené à une forme où tous ses termes sont dissemblables par rapport aux éléments de l'abaque, chacun de ces termes est le produit des éléments de quelque diagonale par un coefficient constant (non nul), soit $C\Omega a_1 b_2$ l'un d'eux correspondant à une diagonale contenant a_1 et b_2, Ω désignant le produit des $m-2$ autres éléments et C le coefficient.

Si, dans F, on rend simultanément et respectivement égaux aux n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \zeta$ d'une même file indéterminée ceux des deux premières lignes de l'abaque, F s'évanouit, quels que soient les coefficients, les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \zeta$ et les éléments des $m-2$ dernières

lignes de l'abaque, puisque celui-ci devient vanescent par les lignes. Comme le terme considéré devient alors $C\Omega\alpha\beta$ et que C n'est pas nul, il faut qu'il se soit formé simultanément des termes semblables détruisant celui-ci. Or un seul a pu naître, et il provient d'un terme en $\Omega a_2 b_1$; F ne peut donc contenir le terme $C\Omega a_1 b_2$ sans contenir en même temps le terme $-C\Omega a_2 b_1$ dont la notation se déduit de la précédente par la transposition des indices 1, 2 des deux lignes que l'on a rendues un instant identiques, accompagnée d'une multiplication par -1.

Le même raisonnement, répété pour toutes les combinaisons deux à deux des lignes de l'abaque, prouve qu'un terme donné quelconque de F est nécessairement accompagné par tous ceux dans lesquels il se métamorphose quand on y transpose deux indices quelconques en le multipliant en même temps par -1. Or ce terme et ceux qui en dérivent ainsi correspondent bien à toutes les diagonales d'une même famille; et, dans deux quelconques, les coefficients sont égaux, ou bien égaux et de signes contraires, selon que les diagonales correspondantes appartiennent à la même classe ou à des classes opposées. Le covanescent F ne peut donc être que de la forme assignée par l'énoncé, les coefficients C jouant le rôle de paramètres indéterminés, et il nous reste simplement à constater que la forme dont il s'agit assure bien sa covanescence.

D'abord il résulte des considérations précédentes que F s'évanouit chaque fois que deux lignes de l'abaque deviennent identiques; elles montrent effectivement que, dans une famille quelconque, chaque terme est alors détruit par celui de classe opposée dont la notation se déduit de la sienne par la transposition des indices de ces lignes, combinée avec une multiplication par -1.

Supposons enfin que l'abaque (1) devienne vanescent par les lignes; dans ce cas (**14**), la première, par exemple, devient agrégée aux autres. Soient $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs d'agrégation. Comme F est linéaire et homogène par rapport à $a_1, b_1, c_1, \ldots, j_1$, la substitution

$$\text{de } \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_m a_m \text{ à } a_1,$$
$$\text{de } \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \ldots + \lambda_m b_m \text{ à } b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

change cette fonction en

$$\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots + \lambda_m F_m,$$

$F_2, F_3, \ldots, F_m$ désignant ce qu'elle devient successivement quand, aux éléments de la première ligne de l'abaque, on y substitue successivement et respectivement ceux de la deuxième, de la troisième, ..., de la $m^{ième}$. Or, d'après ce que nous venons de voir, $F_2, F_3, \ldots, F_m$ sont toutes nulles, puisque ce sont des déterminations de F relatives à des abaques dans chacun desquels deux lignes sont identiques.

11. *Dans un covanescent de l'abaque (1), ordonné par rapport aux éléments de une ou plusieurs lignes, les coefficients des divers termes sont des covanescents de l'abaque réduit à ses autres lignes.*

Ordonnons d'abord le covanescent considéré, par rapport aux éléments de la première ligne par exemple, de manière à le mettre sous la forme

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots + J_1 j_1,$$

$A_1, B_1, \ldots, J_1$ ne dépendant plus de $a_1, b_1, \ldots, j_1$. Si l'abaque, privé de sa première ligne, devient vanescent (par les lignes), l'abaque tout entier l'est forcément aussi (**12**). Donc l'expression ci-dessus s'évanouit, quels que soient $a_1, b_1, \ldots, j_1$, d'où $A_1 = B_1 = \ldots = J_1 = 0$ (**5**). D'ailleurs, chacune de ces expressions est, comme le covanescent considéré, linéaire et homogène relativement aux éléments de l'une quelconque des $m - 1$ dernières lignes de l'abaque.

En ordonnant $A_1, B_1, \ldots, J_1$ par rapport aux éléments de la seconde ligne de l'abaque, les coefficients de $a_2, b_2, \ldots, j_2$ sont de même des covanescents de l'abaque réduit à ses $m - 2$ dernières lignes. Or ces coefficients sont précisément ceux des monômes en $a_1 b_2, a_1 c_2, \ldots, b_1 a_2, b_1 c_2, \ldots$ dans le covanescent considéré, quand on l'ordonne par rapport aux éléments des deux premières lignes.

On raisonne de même dans tout autre cas.

12. *Quand le covanescent le plus général d'un abaque s'évanouit quels que soient ses paramètres indéterminés, l'abaque est vanescent (par ses files les plus longues).*

Nous reportant au paragraphe précédent, supposons qu'il s'agisse de l'abaque (17) ne contenant pas plus de lignes que de colonnes et se réduisant à (15) par la suppression de sa première ligne.

Si (15) est vanescent, (17) l'est aussi (**12**), et notre théorème a lieu.

Si (15) est invanescent, le système (3) est irréductible et a pour file générale de solutions

$$A_0, \; B_0, \; C_0, \; \ldots, \; J_0,$$

coefficients de a_0, b_0, c_0, ..., j_0 dans le covanescent le plus général de l'abaque (17) (**35**), (**36**).

Comme on a, par hypothèse,

$$a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + \ldots + j_0 J_0 = 0,$$

toutes les solutions du système (3) satisfont aussi à l'équation

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + j_0 v = 0.$$

Cette équation est donc agrégée à ce système (**32**), et l'abaque (17) des coefficients de toutes ces équations est vanescent par les lignes (**14**).

Ultérieurement (**54** et suiv. *inf.*), nous déduirons les files en symptose avec un abaque vanescent donné de la considération de son covanescent; nous aurons ainsi une autre démonstration de cette importante proposition, qui achève de justifier le nom que nous avons donné au covanescent.

45. *Tout covanescent de l'abaque* (1) *reste identique à lui-même si on le multiplie par* -1, *après y avoir transposé deux lignes choisies arbitrairement dans cet abaque.*

La transposition considérée équivaut évidemment à celle des indices des deux lignes en question, dans les notations de tous les termes du covanescent (les lettres restant immobiles). Chaque terme se change en un autre dont la diagonale appartient à la classe opposée de la même famille, mais qui ne peut faire partie du covanescent parce qu'il n'a pas le signe prescrit par la règle du n° **40**. La multiplication postérieure par -1 le fait rentrer parmi ceux du covanescent, en lui rendant ce signe, et on aperçoit facilement que la double opération dont il

s'agit régénère, quoique dans un ordre différent, tous les termes de cette fonction.

Comme conséquence de ceci : *Un déplacement quelconque des lignes de l'abaque (1) dans un de ses covanescents équivaut à la multiplication de cette fonction par ± 1, selon qu'il peut être réalisé par un nombre pair ou impair de transpositions de deux lignes.*

44. Dans le covanescent général de l'abaque (1), l'ensemble des termes qui dépendent seulement des éléments de m colonnes données constitue le covanescent général de l'abaque partiel formé par ces m colonnes; c'est ce qui résulte immédiatement de l'application de la règle du n° **40** au développement de ces deux covanescents.

On en conclut que *le covanescent général de notre abaque est la somme de ceux des abaques carrés formés par tous les groupes possibles de m de ses colonnes;* ou bien encore, comme chacun de ces covanescents partiels ne contient qu'un paramètre indéterminé, puisque les diagonales d'un abaque carré ne constituent qu'une seule famille, que *l'on obtient encore ce covanescent en ajoutant, après les avoir multipliés respectivement par autant de paramètres indéterminés indépendants, des covanescents particuliers (non identiquement nuls) de tous ces abaques carrés.*

Nous allons donc nous occuper plus spécialement de ces derniers qui sont très remarquables, et dont la considération supplée à celle du covanescent général d'un abaque non carré.

45. Les termes du covanescent général d'un abaque carré

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & g_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & g_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_m & b_m & c_m & \dots & g_m \end{array} \right.$$

correspondent à des diagonales ne formant qu'une seule famille; par suite (**40**), deux quelconques contiennent comme facteurs des paramètres égaux, ou bien égaux et de signes contraires, selon que les diagonales correspondantes appartiennent à une même classe ou à des classes opposées.

En divisant donc ce covanescent général par le paramètre servant de coefficient à l'un de ses termes, il reste un covanescent particulier composé de termes de la forme $\pm a_p b_q c_r \ldots g_s$ et qui n'est pas nul quels que soient les m^2 éléments de l'abaque, parce que tous ces termes sont dissemblables et que leurs coefficients, les uns égaux à $+1$, les autres à -1, ne sont pas nuls. L'expression ainsi définie est susceptible de deux déterminations égales, mais de signes contraires, selon la classe à laquelle se rattache le terme par le coefficient duquel on a divisé le covanescent général. Mais, en convenant de diviser toujours par le coefficient du terme en $a_1 b_2 c_3 \ldots g_m$, l'ambiguïté se lève, et l'on obtient le covanescent particulier

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 \ldots g_m \pm \ldots,$$

que l'on considère de préférence, et que l'on nomme le *déterminant* de l'abaque carré (2).

Le terme du déterminant mis en évidence, et dont chaque élément est à l'intersection d'une ligne et d'une colonne de rangs égaux, est dit *principal*, lui et la diagonale correspondante qui, géométriquement, va en ligne droite de l'angle gauche supérieur de l'abaque à l'angle l'opposé. On note souvent un déterminant par son abaque encadré à droite et à gauche entre des traits verticaux.

L'*ordre* [1] d'un déterminant est le nombre commun de ses lignes et de ses colonnes; le développement d'un déterminant d'ordre m contient ainsi $1.2.3 \ldots m$ termes se partageant, suivant la disposition des indices relativement à ceux du terme principal, en deux classes d'effectifs égaux; tous sont précédés du signe $+$ dans l'une, du signe $-$ dans l'autre (**40**).

45 *bis*. L'abaque (2) étant carré, son déterminant est pour lui un

---

(1) Ce mot s'applique à tant de sortes de nombres en Mathématiques qu'un autre serait bien préférable. S'il était possible de le changer, je proposerais celui de *hauteur*, par lequel il conviendrait aussi de désigner le nombre des formes (linéaires ou non) qui composent un même système. Le nombre des variables indépendantes pourrait être appelé la *largeur* d'une seule forme ou d'un système.

covanescent, aussi bien relativement aux colonnes qu'aux lignes (**34** *bis*, II); un autre abaque carré, ayant pour files de chaque nom celles de l'autre nom dans (2) rangées dans le même ordre, a donc le même covanescent général que cet abaque (2), et par suite le *même déterminant*, puisque les diagonales principales sont identiques. En d'autres termes, *un déterminant reste identique à lui-même si dans son abaque on change les lignes en colonnes et inversement, en transposant chaque élément avec son symétrique relativement à la diagonale principale.*

En conséquence, *on peut déduire aussi tous les termes d'un déterminant de son terme principal, en transposant les lettres des notations de toutes les manières possibles, les indices restant maintenant immobiles, et en changeant le signe à chaque transposition.* Car, dans chacun des deux abaques carrés ci-dessus considérés, les lettres sont disposées comme les indices dans l'autre.

46. En combinant les propriétés générales des covanescents d'un abaque quelconque, avec cette réciprocité remarquable entre les lignes et les colonnes d'un déterminant, on obtient celles de ces expressions. Nous les énonçons ci-après, en renvoyant aux numéros correspondants.

I. *Un déterminant d'ordre m est une fonction homogène de degré m par rapport à l'ensemble de ses éléments*, c'est évident; *mais il est linéaire et homogène relativement à ceux d'une même file quelconque considérés isolément* (**34** *bis*), (**45** *bis*).

II. *Si donc on multiplie, si l'on divise par une même quantité k les éléments d'une même file quelconque, ou bien si l'on change tous leurs signes (ce qui équivaut à les multiplier par* -1), *le déterminant est multiplié ou divisé par k, ou bien changé simplement de signe.*

Plus généralement, si l'on substitue aux éléments de cette file ceux d'une file agrégée à q autres quelconques de même longueur, avec $k', k'', \ldots, k^{q}$ *pour multiplicateurs d'agrégation, le déterminant* Δ *se transforme en*

$$k'\Delta' + k''\Delta'' + \ldots + k^{q}\Delta^{(q)},$$

Δ', Δ'', ..., $\Delta^{(q)}$ désignant ce qu'il deviendrait, si à la file considérée on substituait successivement, mais séparément, chacune des q autres.

III. *Pour qu'un déterminant soit nul, il est nécessaire et suffisant que les valeurs actuelles de ses éléments rendent son abaque vanescent ou, ce qui revient au même, que dans un sens donné quelconque il y existe quelque file agrégée à ses parallèles* (**14**).

Le déterminant s'annule quand son abaque est vanescent, parce qu'il en est un covanescent particulier (**45**), (**45** *bis*). Quand le déterminant s'annule, le covanescent général s'annule aussi (**45**) et l'abaque est vanescent (**42**).

IV. *Un déterminant n'est pas modifié par l'addition, aux éléments d'une file donnée quelconque, de ceux de mêmes rangs dans une file étrangère quelconque agrégée à quelques-unes des files du déterminant, parallèles à celle que l'on considère.*

Car cette opération revient (II) à ajouter au déterminant ce qu'il devient quand on substitue à la file choisie la file agrégée à ses parallèles, c'est-à-dire un determinant nul (III).

Toutes ces observations sont d'une utilité continuelle dans le maniement des déterminants.

V. *Des transpositions quelconques exécutées sur les lignes d'un déterminant et simultanément aussi sur ses colonnes le laissent identique à lui-même, ou bien changent simplement son signe, selon que leur nombre total est pair ou impair* (**45**).

47. *Par rapport à ses éléments considérés comme des variables indépendantes, un déterminant est un polynôme premier, c'est-à-dire qu'aucun autre polynôme entier ne peut le diviser s'il ne se réduit à une constante ou bien à ce déterminant lui-même multiplié par quelque facteur constant.*

Soient Δ un déterminant d'ordre quelconque m et H, K deux polynômes entiers par rapport à ses éléments, dont il serait le produit.

Un élément donné e_i de Δ entre nécessairement dans l'un des polynômes H, K, dans H par exemple. Il en résulte que l'autre facteur K ne peut renfermer aucun élément de la colonne de Δ, à laquelle appartient e_i, car autrement ce déterminant ne serait pas linéaire et homo-

gène par rapport aux éléments de cette colonne (46, I). En d'autres termes, les éléments $e_1, e_2, \ldots, e_m$ entrent tous dans H, et aucun d'eux dans K.

Partant de là et raisonnant de la même manière, on trouve que K ne peut contenir non plus aucun des éléments de Δ situés sur les lignes auxquelles appartiennent soit e_1, soit e_2, ..., soit e_m, c'est-à-dire aucun élément de Δ, quel qu'il soit. Donc K se réduit à une constante k et H au produit de Δ par $\frac{1}{k}$.

48. Nous appellerons *déterminants* d'un abaque non carré (A) ceux dont les abaques sont formés par tous les groupes imaginables de files les plus courtes de (A) prises en nombre m égal à leur longueur. Habituellement l'ambiguïté de cette définition résultant de ce que, pour chaque déterminant, l'ordre de succession des files n'est pas déterminé, n'a pas d'inconvénients. Sous le bénéfice de cette observation, l'abaque en question a $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$ déterminants distincts, si n est sa plus grande dimension. *En ajoutant tous ces déterminants après les avoir multipliés par des paramètres indéterminés en même nombre, on régénère évidemment le covanescent général de l'abaque considéré* (44).

49. Nous aurons aussi à considérer les déterminants des abaques déduits de celui dont nous parlons, par la suppression d'un nombre quelconque de files parallèles.

Soient (A) un abaque de dimensions m, n, et q un entier quelconque ne surpassant ni m ni n. En y prenant arbitrairement q lignes et q colonnes et rapprochant toutes ces files de manière à les rendre contiguës, les q^2 éléments appartenant à la fois aux unes et aux autres forment un abaque carré dont le déterminant (abstraction faite du signe qui dépend de l'ordre de succession des files) est d'ordre q, et se nomme le déterminant *mineur* de l'abaque proposé, *relatif* aux q lignes et aux q colonnes choisies. Tous les déterminants mineurs d'ordre q de notre abaque sont en nombre égal au produit des nombres

$$M_q = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q}, \quad N_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}.$$

exprimant combien m et n objets fournissent respectivement de combinaisons q à q.

Si $q = 1$, ces mineurs en nombre mn se réduisent aux éléments mêmes de l'abaque (A). Si q est égal à la moindre dimension de l'abaque, ils ne sont pas autre chose que les déterminants mêmes de cet abaque, tels que nous les avons définis ci-dessus, et que par opposition nous nommerons *majeurs*. Souvent il y a avantage à ne pas les distinguer essentiellement des mineurs proprement dits.

Pour bien concevoir l'ensemble de ces déterminants mineurs d'ordre q de l'abaque (A), et aussi pour donner de la précision à certaines propositions les concernant, il faut les placer dans les cases d'un nouvel abaque $(A)_q$ de dimensions M_q, N_q, dont chaque colonne contient tous ceux dont les éléments appartiennent à q mêmes colonnes de l'abaque (A), et dans une même ligne tous ceux qui proviennent ainsi de q mêmes lignes de cet abaque.

Il faut en outre, dans une même colonne de l'abaque $(A)_q$, écrire les colonnes des déterminants mineurs d'une manière, arbitraire d'ailleurs, mais telle, que celles d'un même rang quelconque dans tous ne soient composées que d'éléments empruntés à une même colonne de l'abaque (A). Et la même règle doit être suivie relativement aux lignes de l'abaque (A), pour l'arrangement des lignes dans les déterminants mineurs appartenant à une même ligne de l'abaque $(A)_q$. Cet abaque $(A)_q$ ainsi construit sera ce que nous nommerons l'*abaque des mineurs d'ordre q de l'abaque proposé.*

50. Entre le déterminant d'un abaque carré et certains de ses mineurs, comme aussi entre ces derniers seulement, il existe des relations importantes dont nous allons parler.

Soit δ' un déterminant mineur d'ordre q d'un déterminant donné d'ordre m, c'est-à-dire de son abaque : on nomme mineur *complémentaire de* δ' le mineur $'\delta$ d'ordre $m-q$ du même abaque, relatif (49) aux $m-q$ lignes et $m-q$ colonnes auxquelles δ' ne l'est pas, ce nouveau déterminant $'\delta$ ayant ses diverses files écrites dans un ordre convenable qui sera réglé dans un instant. Il est clair qu'il y a réciprocité, c'est-à-dire que δ' est inversement le mineur complémentaire de $'\delta$.

Après avoir construit, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (49),

l'abaque des mineurs d'ordre q du déterminant proposé, nous disposerons leurs complémentaires dans les cases semblablement placées d'un nouvel abaque de même dimension. Cela posé, on a ce théorème :

Soient $Q = \frac{m(m-1)\dots(m-q+1)}{1.2\dots q}$, *puis*

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \delta'_1 & \dots & \vartheta'_1 & \dots & \tau'_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ \delta'_i & \dots & \vartheta'_i & \dots & \tau'_i, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_Q & \dots & \vartheta_Q & \dots & \tau_Q, \end{vmatrix}$$

et

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} '\delta_1 & \dots & '\vartheta_1 & \dots & '\tau_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ '\delta_i & \dots & '\vartheta_i & \dots & '\tau_i, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ '\delta_Q & \dots & '\vartheta_Q & \dots & '\tau_Q \end{vmatrix}$$

l'abaque des mineurs d'ordre q du déterminant proposé Δ *et celui de leurs complémentaires convenablement écrits. En induisant l'une par l'autre* (**2**) *deux files de même nom dans ces deux abaques, on reproduit* Δ *ou on trouve zéro, selon que les rangs occupés respectivement par les files considérées dans leurs abaques sont égaux ou inégaux.*

Par exemple, on a pour les lignes

$$(5) \qquad \delta'_1\,'\delta_1 + \dots + \vartheta'_1\,'\vartheta_1 + \dots + \tau'_1\,'\tau_1 = \Delta,$$

$$(6) \qquad \delta'_1\,'\delta_i + \dots + \vartheta'_1\,'\vartheta_i + \dots + \tau'_1\,'\tau_i = 0,$$

et même chose pour les colonnes.

Le déterminant Δ est évidemment un covanescent de l'abaque formé par quelques unes seulement de ses lignes, en particulier de celui dont $\delta'_1, \dots, \vartheta'_1, \dots, \tau'_1$ sont les déterminants majeurs. On a donc identiquement (**48**)

$$(6\ bis) \qquad \Delta = \zeta\delta_1 + \dots + \rho\vartheta_1 + \dots + \varpi\tau_1.$$

$\zeta, \ldots, \varphi, \ldots, \varpi$ ne dépendant pas des éléments des q lignes considérées dans Δ. Dans ces q lignes, réduisons maintenant à 1 les éléments qui forment la diagonale principale de δ'_1 et à zéro tous les autres; on voit immédiatement que δ'_1 se réduit à 1, tous les autres mineurs de la première ligne de l'abaque (3) à zéro; puis, par une vérification facile, que Δ devient, au signe près, le mineur complémentaire $'\delta_1$ de δ'_1, tel que nous l'avons défini jusqu'à présent.

La relation précédente devient donc

$$\pm{}'\delta_1 = \zeta.1,$$

d'où

$$\zeta = \pm{}'\delta_1,$$

et de même

$$\varphi = \pm{}'\theta_1, \quad \ldots, \quad \varpi = \pm{}'\tau_1.$$

Mais on aura

$$\zeta = {}'\delta_1, \quad \ldots, \quad \varphi = {}'\theta_1, \quad \ldots, \quad \varpi = {}'\tau_1$$

si, après avoir disposé les lignes des mineurs de la première ligne de l'abaque (4) de manière que celles d'un même rang quelconque soient toujours des fragments d'une même ligne de Δ, on remanie les colonnes de ces mineurs de manière à leur donner des signes convenables. Cette précaution ayant été prise, ce que nous supposerons désormais, l'égalité (6 *bis*) se transformera bien dans la relation (5) par la substitution de $'\delta_1, \ldots, {}'\theta_1, \ldots, {}'\tau_1$ à $\zeta, \ldots, \varphi, \ldots, \varpi$ respectivement.

Exécutons maintenant sur les lignes de Δ des transpositions de nature à changer $\delta'_1, \ldots, \theta'_1, \ldots, \tau'_1$ en $\delta'_i, \ldots, \theta'_i, \ldots, \tau'_i$ respectivement, et nommons $'\delta_i, \ldots, {}'\theta_i, \ldots, {}'\tau_i$ ce que deviennent alors $'\delta_1, \ldots, {}'\theta_1, \ldots, {}'\tau_1$, ou $-{}'\delta_1, \ldots, -{}'\theta_1, \ldots, -{}'\tau_1$, suivant que ces transpositions laissent ou non invariable le signe de Δ (**46**, V). Il est évident que ces expressions sont les mineurs complémentaires de la $i^{\text{ième}}$ ligne de l'abaque (3), et que, si ce sont elles que l'on a inscrites dans les cases de la $i^{\text{ième}}$ ligne de l'abaque (4), l'identité (5) donnera bien

$$\delta'_i{}'\delta_i + \ldots + \theta'_i{}'\theta_i + \ldots + \tau'_i{}'\tau_i = \Delta,$$

c'est-à-dire l'identité correspondante pour les $i^{\text{èmes}}$ lignes des abaques (3) et (4).

Considérons actuellement le premier membre de la relation (6); d'après ce qui précède, cette expression est égale à un certain déterminant ∇ d'ordre m ayant pour lignes celles du déterminant proposé Δ, dont des fragments ont servi à former les lignes tant des mineurs $\delta'_1, \ldots, \mathcal{G}'_1, \ldots, \tau'_1$ que de ${}'\delta_i, \ldots, {}'\theta_i, \ldots, {}'\tau_i$. Mais il est évident que deux au moins de ces lignes sont identiques; on a donc $\nabla = 0$ (**46**, III), ce qui prouve l'exactitude de toutes les relations analogues à (6).

Les mineurs de la première colonne de l'abaque (4) étant respectivement les complémentaires de ceux de la première colonne de l'abaque (3), lesquels sont relatifs à quelque groupe de q files parallèles de Δ, il est certain, en conformité de ce que nous venons de voir, et en ayant égard à la réciprocité des lignes et des colonnes (**45** *bis*), qu'en choisissant convenablement les signes dans l'expression

$$\pm \delta_1{}'\delta_1 \pm \ldots \pm \delta'_i{}'\delta_i \pm \ldots \pm \delta'_\varrho{}'\delta_\varrho$$

elle se réduit à Δ. Mais il est évident qu'il faut prendre partout le signe $+$, car l'ensemble des identités analogues à (5) qui viennent d'être établies pour les lignes montrent que les termes des développements de $+\delta'_1{}'\delta_1, \ldots, +\delta'_i{}'\delta_i, \ldots, +\delta'_\varrho{}'\delta_\varrho$ appartiennent tous à Δ; d'ailleurs, étant dissemblables, ils ne peuvent se réduire. Cette remarque prouve l'exactitude des relations du genre de (5), mais relatives à deux colonnes semblablement placées dans nos abaques, relations d'où l'on déduit immédiatement les identités du genre de (6) pour deux colonnes placées de manières différentes dans les mêmes abaques.

On peut formuler très simplement la dernière partie de cette proposition en disant que *deux files de même nom, mais de rangs inégaux dans les abaques* (3), (4), *sont toujours en symptose* (**10**).

Une règle très simple indique comment il faut écrire les éléments des mineurs complémentaires ${}'\delta_1, \ldots, {}'\mathcal{G}_1, \ldots, {}'\tau_1$ pour que la relation (5) ait lieu : après avoir construit l'abaque de l'un d'eux δ_1, par exemple, de manière que les termes du développement de l'expression $\delta_1{}'\delta_1$ soient précédés des signes qu'ils doivent avoir dans celui de Δ, on exécutera dans cette expression toutes les permutations des co-

lonnes de Δ qui peuvent changer les colonnes de δ'_1 en celles de ..., ϑ'_1, ..., τ'_1 respectivement; puis, pour ..., $'\theta_1$, ..., $'\delta_1$, on prendra ce en quoi ces permutations changent $'\delta_1$, chaque résultat étant ensuite multiplié par $+1$ ou -1, selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions équivalentes à la permutation correspondante.

51. Chacune des formules (5) et des formules analogues pour les colonnes opère une transformation de Δ que l'on peut nommer son *ordination* par rapport à ceux de ses mineurs formant soit quelque file de l'abaque (3), soit celle de mêmes nom et rang dans (4). On peut aller plus loin, et décomposer Δ en une somme dont chaque terme a pour facteurs non plus deux, mais k déterminants d'ordres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ de somme égale à m, dans deux quelconques desquels ne se trouvent pas respectivement deux éléments appartenant à un même file de Δ.

On construit arbitrairement un de ces produits de k mineurs, en prenant garde seulement que son développement donne des termes précédés de signes qu'ils ont dans Δ; les autres produits se tirent tous de ce premier par des permutations, soit des lignes, soit des colonnes de Δ, accompagnées de multiplications par $+1$ ou -1 réglées comme à la fin du numéro précédent. Le développement de chaque produit donne

$$q_1!\, q_2! \ldots q_k!$$

termes de Δ; comme ils sont au nombre de $\frac{m!}{q_1!\, q_2! \ldots q_k!}$, marquant combien il y a de manières de répartir m objets en k groupes en contenant respectivement $q_1, q_2, \ldots, q_k$, on retrouve bien au total les $m!$ termes de Δ.

Si, avant d'effectuer cette décomposition, on avait réduit Δ à zéro en y rendant identiques quelques files parallèles, on trouverait de nouvelles identités analogues à (6).

En prenant $k = m$, $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 1$, on réalise la plus complète de ces décompositions, car les divers produits ci-dessus formés se réduisent aux termes élémentaires du déterminant.

Il est inutile de pousser plus loin ces dernières considérations qui, jusqu'à présent, sont à peu près inusitées.

52. Le cas particulier le plus intéressant du théorème ci-dessus est

celui où q, ordre des mineurs de l'abaque (3), se réduisant à 1, ces mineurs sont les éléments mêmes

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m \end{cases}$$

du déterminant proposé Δ d'ordre m. Les mineurs complémentaires, éléments de l'abaque (4), sont alors d'ordre $m-1$, et nous les désignerons respectivement par

$$(8)\qquad \begin{cases} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1, \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m. \end{cases}$$

La formule (5) donne pour le déterminant Δ *ordonné par rapport aux éléments de sa première ligne*

$$(9)\qquad \Delta = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + \ldots + G_1 g_1,$$

et des représentations semblables relativement à toute autre file que celle-ci.

Les identités de ce genre ramènent ainsi le développement du déterminant Δ d'ordre m, à ceux de m déterminants d'ordre $m-1$ seulement, tels que A_1, B_1, C_1, ..., G_1; à leur tour, ceux-ci peuvent être semblablement décomposés, et ainsi de suite.

Les formules (6) en donnent du type

$$(10)\qquad A_1 a_i + B_1 b_i + C_1 c_i + \ldots + G_1 g_i = 0,$$

l'indice i n'étant pas $=1$, et du type

$$(11)\qquad A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_m k_m = 0.$$

la lettre k étant différente de a. Toutes ces relations sont très employées; en particulier, elles permettent d'achever la solution de plusieurs problèmes que nous avons déjà ébauchés et auxquels nous allons revenir.

53. *Reconnaître si un abaque donné est vanescent ou invanescent par ses files les plus longues.*

Il résulte immédiatement des nos **48**, **42** que le premier cas a lieu, ou le second, suivant que les déterminants majeurs de l'abaque sont ou non tous nuls.

54. *Réduire par les lignes l'abaque* (1) *de dimensions quelconques.*

Formons (**49**) les abaques des déterminants mineurs d'ordres 1, 2, 3, ... de l'abaque considéré, et soit q ($\leq m$ et $\leq n$) l'ordre le plus élevé de ceux dans lesquels il se trouve quelque déterminant mineur non nul. Si le nombre q n'existe pas, tous les éléments de l'abaque sont nuls, et il n'y a pas lieu de le réduire. Si $q = m$, les déterminants proprement dits de l'abaque ne sont pas tous nuls, et il est invanescent par ses files les plus longues (**48**), (**42**) ou, ce qui est la même chose, irréductible par les lignes.

Supposons donc $0 < q < m$, et admettons, pour fixer les idées, que les q premières lignes de l'abaque aient fourni des éléments à quelque déterminant mineur non nul d'ordre q. L'abaque partiel formé par ces q lignes est invanescent, parce que le mineur dont il s'agit fait partie de ses déterminants majeurs, et qu'ainsi ces derniers ne sont pas tous nuls. Mais chacune des $m - q$ autres lignes est agrégée à cet abaque partiel invanescent, parce que, en la lui adjoignant, on obtient un abaque dont les déterminants majeurs sont des mineurs d'ordre $q + 1$ du proposé, et partant tous nuls (**48**), (**42**), (**14**).

Les q lignes considérées forment donc un abaque invanescent et équivalent par les lignes au proposé.

On opérerait de même s'il s'agissait des colonnes.

55. *Reconnaître si la ligne*

$$(2) \qquad a, b, c, \ldots, i$$

est agrégée à celles de l'abaque (1) *supposé invanescent par les lignes, et, le cas échéant, trouver les éléments de la file d'agrégation.*

Si $m = n$, il y a toujours agrégation (**14**), (**12**); si $m < n$, elle a lieu ou non, selon que l'abaque (1) accru de la ligne (12) est vanescent ou invanescent par les lignes, c'est-à-dire que les déterminants de cet abaque de $m + 1$ lignes sont tous nuls ou non.

L'agrégation ayant lieu dans le cas de $m < n$, supposons que le déterminant Δ des m premières colonnes de l'abaque (1) soit de ceux qui ne sont pas nuls. On peut considérer Δ comme le mineur complémentaire de l'élément h dans le déterminant des $m + 1$ premières colonnes de l'abaque de $m + 1$ lignes; soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ ceux des éléments $h_1, h_2, \ldots, h_m$ dans le même déterminant d'ordre $m + 1$.

On a les $n - m$ relations

$$\Delta h + \Delta_1 h_1 + \Delta_2 h_2 + \ldots + \Delta_m h_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta i + \Delta_1 i_1 + \Delta_2 i_2 + \ldots + \Delta_m i_m = 0,$$
$$\Delta j + \Delta_1 j_1 + \Delta_2 j_2 + \ldots + \Delta_m j_m = 0,$$

parce que leurs premiers membres reproduisent ceux des déterminants de l'abaque de $m + 1$ lignes, qui contiennent ses m premières colonnes (**52**). Les formules du type (11), appliquées au déterminant d'ordre $m + 1$ que nous considérons, donnent, en outre,

$$\Delta a + \Delta_1 a_1 + \Delta_2 a_2 + \ldots + \Delta_m a_m = 0,$$
$$\Delta b + \Delta_1 b_1 + \Delta_2 b_2 + \ldots + \Delta_m b_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta g + \Delta_1 g_1 + \Delta_2 g_2 + \ldots + \Delta_m g_m = 0.$$

D'après ces $n - m + m = n$ relations, la file d'agrégation cherchée est évidemment

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad -\frac{\Delta_m}{\Delta}.$$

Quand $m = n$, on trouvera la même file en appelant $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta$

les mineurs complémentaires des éléments d'une colonne vanescente adjointe à l'abaque de $m+1$ lignes, dans le déterminant unique de cet abaque.

Cette méthode ne diffère pas, au fond, de celle qui consisterait à résoudre directement les m équations linéaires non homogènes à m inconnues, dont les lignes des coefficients seraient les m premières colonnes de notre abaque de $m+1$ lignes (**61** *inf.*).

56. Si l'abaque (1) appartient à un système de m formes linéaires à n variables, l'application à ses lignes de ce qui précède fournit la solution des questions suivantes :

Réduire le système dont il s'agit; ce qui fera reconnaître en particulier s'il est ou non irréductible.

Reconnaître si une forme donnée est agrégée ou non à un système irréductible donné, et, dans le premier cas, trouver les éléments de la file d'agrégation.

Ces solutions conduisent ainsi à la considération des déterminants de l'abaque du système; nous les nommerons les *déterminants* (majeurs ou mineurs) du système, dans le cas de beaucoup le plus important où m ne surpasse pas n.

Pour distinguer entre eux les déterminants majeurs, il suffit d'indiquer, dans l'ordre voulu, les m variables du système dont les coefficients constituent les colonnes de chacun d'eux; par exemple, le déterminant des m premières colonnes de l'abaque (1) est celui du système *pris par rapport à l'arrangement* m à m, $xyz \ldots s$, des n variables indépendantes. Relativement au système, ces déterminants jouent des rôles identiques à celui des coefficients dans une simple forme. Les mineurs d'ordre q s'introduisent habituellement dans les questions où il y a à considérer soit q des formes données séparément, soit simultanément avec le système donné, quelque autre système de q forme seulement

57. Dans le n° **55** du paragraphe précédent auquel nous nous reporterons jusqu'à la fin de celui-ci, nous avons déduit de la considération d'un covanescent de l'abaque carré (18) un système de formes en réduction apparente équivalent au système irréductible des premiers membres des équations (3). Il est composé des premiers

membres des équations (22), (23), etc. Rien n'empêche de prendre, pour le covanescent, le déterminant même de cet abaque. Il est évident alors que $(abc\ldots g)$, coefficient commun des variables $x, y, z, \ldots, t$ respectivement, dans les formes du second système, est égal au déterminant du proposé pris par rapport à ces variables. Quant au coefficient $(hbc\ldots g)$ d'une variable non saillante, t par exemple, dans la première forme du second système, il est égal à celui des déterminants du système proposé, dans lequel $(abc\ldots g)$ se change par la substitution de $h_1, h_2, \ldots, h_m$, coefficients de t, à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ coefficients de x, c'est-à-dire de la variable saillante qui a un coefficient différent de zéro dans la forme où l'on cherche le nouveau coefficient de t. Cette remarque permet d'écrire immédiatement tout système en réduction apparente équivalent au système considéré.

L'abaque d'agrégation (6) du système des premiers membres des équations (22), etc., au système primitif, est

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1, \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m, \end{matrix}$$

abaque des mineurs complémentaires des éléments du déterminant $(abc\ldots g)$, ce qui résulte de ce qui a été vu tant au numéro cité qu'au n° 55.

Quant à l'abaque d'agrégation du système primitif à l'autre, il s'obtient évidemment en divisant par le déterminant $(abc\ldots g)$ tous les éléments de son propre abaque dans lequel on a changé les lignes en colonnes et les colonnes en lignes (22).

58. Dans un système donné de m formes linéaires, nous appellerons *contigus par* $m-1$ *colonnes données* deux déterminants dont les abaques contiennent chacun les $m-1$ colonnes dont il s'agit. Cela posé, les remarques suivantes aident à la conception de la structure des systèmes en réduction apparente équivalents à un système irréductible de m formes. Les variables saillantes $x, y, z, \ldots, s$ constituent un groupe de m choisies arbitrairement parmi toutes, sous la seule condition que

$(xyz\ldots s)$, déterminant de leurs coefficients, ne soit pas nul. Dans chaque forme, les variables saillantes ont pour coefficients, l'une $(xyz\ldots s)$, les $m-1$ autres zéro, et les variables non saillantes, tous les déterminants contigus à celui-ci par les colonnes des coefficients de ces $m-1$ dernières variables saillantes. Dans deux formes différentes, une même variable non saillante a pour coefficients des déterminants contigus. Enfin l'ensemble des coefficients de ces formes comprend le déterminant $(xyz\ldots s)$ et tous ceux qui lui sont contigus par quelque groupe de $m-1$ colonnes.

59. *Que le système considéré soit ou non irréductible, une forme construite comme*

$$(xyz\ldots s)x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s$$
$$+ (tyz\ldots s)t + \ldots + (uyz\ldots s)u + (vyz\ldots s)v$$

avec un quelconque de ses déterminants $(xyz\ldots s)$ et tous ses contigus par $m-1$ mêmes colonnes est agrégée à ce système. Car, si tous les coefficients de cette forme sont nuls, elle est agrégée à telles autres que l'on voudra. Si l'un d'eux $(tyz\ldots s)$ ne l'est pas, cas auquel le système considéré est irréductible, cette forme appartient au système en réduction apparente équivalent au proposé, qui a $t, y, z, \ldots, s$ pour variables saillantes.

60. D'après ce que nous avons dit ci-dessus (**57**), à propos de la transformation d'un système irréductible de formes linéaires en un autre équivalent, mais en réduction apparente, on peut supposer relativement aux formules (24) qui fournissent toutes les files de solutions des équations homogènes (3), que les paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ ont pour coefficients, dans les $n-m$ dernières, un déterminant non nul des premiers membres, et dans les m autres, ses contigus qui se rattachent à lui par une loi évidente.

On peut, bien entendu (**55**), obtenir également les mêmes solutions en prenant les coefficients de $a_0, b_0, c_0, \ldots, j_0$ dans le covanescent général de l'abaque (17) dont nous connaissons maintenant le développement (**40**) (**48**). En opérant ainsi, on a cet avantage de les

avoir sous des formes où tous les déterminants des premiers membres figurent de la même manière, sans distinction entre ceux qui sont nuls et ceux qui ne le sont pas. Mais il y a aussi un inconvénient : tandis que les formules (24) renferment le nombre minimum $n-m$ de paramètres indéterminés et donnent *une fois* seulement (51) chaque file de solutions, les autres, dont nous rappelons l'existence, contiennent $\frac{n(n-1)\dots(n-m)}{1.2.3\dots(m+1)}$ paramètres, et fournissent plus d'une fois chaque file de solutions.

Il serait extrêmement facile de prouver que, dans ces dernières formules, la simple suppression de certains termes les fait coïncider absolument avec les formules (24) sans diminuer, bien entendu, leur généralité, ce qui rendrait tout à fait directe la voie suivie pour arriver à celles-ci. Mais, pour abréger, je laisse au lecteur le soin de faire le raisonnement.

61. Les formules (24) écrites avec des déterminants et appliquées à la résolution des équations homogènes (13) procurent immédiatement celle du système non homogène (12) quand il est irréductible et possible. En les supposant résulter d'une résolution par rapport à $x, y, z, \dots, s$, l'inconnue w est représentée par le produit du déterminant $(abc\dots g)$ et d'un certain paramètre ψ; pour la réduire à 1, il faut donc poser partout $\psi = \frac{1}{(abc\dots g)}$, ce qui introduit le diviseur $(abc\dots g)$ dans les expressions de $x, y, z, \dots, s$.

Quand $n=m$, les inconnues ont pour valeurs

$$x=-\frac{(kbc\dots g)}{(abc\dots g)},\quad y=-\frac{(akc\dots g)}{(abc\dots g)},\quad \dots,\quad s=-\frac{(abc\dots k)}{(abc\dots g)};$$

ce sont les célèbres formules de Cramer qui ont été le point de départ de toute la théorie que nous exposons.

62. En thèse générale, on nomme *élimination de ν inconnues entre m équations simultanées quelconques données* l'opération consistant à former une ou plusieurs équations jouissant de la double propriété : 1° de ne plus renfermer les ν inconnues dont il s'agit; 2° d'être satis-

faites pour toutes les valeurs des autres inconnues qui appartiennent à des files de solutions des équations proposées, sans toutefois être identiques, c'est-à-dire sans pouvoir être satisfaites par toutes les valeurs imaginables de ces mêmes inconnues (sauf l'existence fortuite de relations spéciales entre les coefficients des équations proposées).

Quand il s'agit d'équations linéaires telles que (12), la proposition suivante renferme à peu près tout ce qu'il est utile de savoir pour ce cas.

On peut toujours éliminer ν inconnues dont les coefficients forment un abaque vanescent par les lignes, de manière que la ou les équations résultantes restent linéaires par rapport aux $n-\nu$ inconnues non éliminées.

Il suffit évidemment, pour cela, d'induire les équations proposées par une file invanescente de m éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en symptose par les colonnes avec l'abaque des coefficients des inconnues à éliminer. L'équation résultante ne les contient plus, et, comme elle est agrégée aux proposées, elle en admet néanmoins toutes les solutions (**34**, I). D'ailleurs, elle n'est pas identique, du moins en général; car autrement les $n-\nu+1$ autres coefficients s'y évanouiraient aussi, et l'abaque des équations proposées serait vanescent par les lignes, ce qui exigerait entre ses éléments l'existence de relations spéciales qui ne sont pas supposées avoir lieu

Les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dépendent d'équations linéaires simultanées que nous savons résoudre. Rien ne s'oppose à ce que l'on puisse trouver pour eux plusieurs systèmes de valeurs conduisant encore à plusieurs autres équations résultantes et formant un système irréductible; dans ce cas, on peut éliminer de plusieurs manières les ν inconnues en question. Mais tout dépend de circonstances particulières dont il est sans intérêt de faire ici l'étude détaillée.

Si $\nu < m$, le tableau des coefficients des ν inconnues quelconques du système (12) ne peut être réduit par les lignes : *entre m équations linéaires on peut donc toujours éliminer des inconnues en nombre quelconque inférieur à m, et obtenir ainsi une ou plusieurs équations résultantes linéaires par rapport aux inconnues non éliminées.*

Nous avons fait de véritables éliminations en transformant le système (3) en un autre équivalent en réduction apparente (**33**).

Développements sur la composition des systèmes de formes linéaires.

65. Au début de notre théorie (nos 5 et suiv.), nous avons défini la *composition* d'un système *simple* d'abaque

$$(1)\quad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & i_1 & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 & h_2 & \ldots & i_2 & j_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & i_m & j_m \end{matrix}\right.$$

à m lignes et n colonnes, avec un système *composant* d'abaque

$$(2)\quad \left\{\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m, \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_m, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \ldots & \varpi_m, \end{matrix}\right.$$

à M lignes et m colonnes, et, généralisant la notion de l'induction entre une file et un abaque ayant une dimension égale à sa longueur, nous avons appelé l'abaque du système *composé*

$$(3)\quad \left\{\begin{matrix} \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m, & \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m, & \ldots, & \lambda_1 j_1 + \ldots + \lambda_m j_m, \\ \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_m a_m, & \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m, & \ldots, & \mu_1 j_1 + \ldots + \mu_m j_m, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varpi_1 a_1 + \ldots + \varpi_m a_m, & \varpi_1 b_1 + \ldots + \varpi_m b_m, & \ldots, & \varpi_1 j_1 + \ldots + \varpi_m j_m \end{matrix}\right.$$

le résultat de l'induction des abaques (1), (2) *colonne à ligne*. Mais jusqu'à présent nous nous sommes moins occupés des détails de cette opération que de la relation générale du système composé au système simple, abstraction faite du système composant, relation à laquelle nous avons donné le nom d'*agrégation*. Nous allons compléter cette théorie, et tout d'abord étudier de plus près les relations qui existent entre les éléments des trois abaques ci-dessus, en commençant par quelques observations générales.

I. De même que pour la formation de l'abaque (3) les colonnes de (1) ont été induites par les lignes de (2) qui sont de même longueur, on peut induire les unes par les autres des files de tout sens donné, mais de longueurs égales dans deux abaques quelconques ayant une dimension commune. Dans chacun de ces abaques *inducteurs*, le sens *inductoriel* est celui des files qui concourent ainsi à l'induction; le sens *non inductoriel* est celui des autres. Pour (1), par exemple, les colonnes sont inductorielles, les lignes, non inductorielles. Dans l'abaque *induit*, les files d'un même sens contiennent chacune les *induits* d'une même file inductorielle de l'un des inducteurs, par toutes celles de l'autre; ses dimensions sont donc égales aux longueurs des files non inductorielles dans les deux inducteurs; en ne faisant aucune distinction entre ses deux sens, il est indépendant de l'ordre des inducteurs.

II. Dans un sens de l'abaque induit, chacune de ses files est agrégée aux files non inductorielles du premier inducteur, avec quelque file inductorielle du second inducteur pour file d'agrégation; c'est le *sens d'agrégation* de l'induit à son premier inducteur; l'autre inducteur joue alors le rôle d'abaque d'agrégation. De même pour l'autre sens de l'induit en permutant les inducteurs.

III. *Si l'un des abaques inducteurs est vanescent par ses files inductorielles, l'abaque induit l'est aussi par les files de son sens d'agrégation à l'autre inducteur.*

Car toute file de n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ qui est en symptose avec l'abaque (1) par ses lignes l'est évidemment aussi avec l'abaque induit (3) par ses lignes; cet induit est donc vanescent par ses colonnes dont la direction est celle où il est agrégé à (2), si la file dont il s'agit est invanescente.

IV. *Si l'abaque induit est vanescent par les files de son sens d'agrégation à l'un des inducteurs, ou bien celui-ci par ses files non inductorielles, ou bien l'autre inducteur par ses files inductorielles, est certainement vanescent.*

Pour fixer les idées, supposons l'induit (3) en symptose par les lignes avec quelque file invanescente de n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$, c'est-

à-dire vanescent par les colonnes, files du sens de son agrégation à l'inducteur (2). On aura pour sa première ligne

$$(\alpha a_1 + \beta b_1 + \ldots + \zeta j_1)\lambda_1$$
$$+ (\alpha a_2 + \beta b_2 + \ldots + \zeta j_2)\lambda_2 + \ldots + (\alpha a_m + \beta b_m + \ldots + \zeta j_m)\lambda_m = 0,$$

et pour les M − 1 autres, ce que devient cette égalité par la substitution à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des M − 1 autres lignes de l'inducteur (2). Si donc les m expressions entre parenthèses ne sont pas toutes nulles, leur file est invanescente, et les égalités précédentes montrent que l'inducteur (2) est vanescent par les colonnes, ses files non inductorielles. Sinon leur nullité entraîne la symptose de la file $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ avec les lignes de l'inducteur (1), c'est-à-dire la vanescence de celui-ci par les colonnes, ses files inductorielles.

64. *L'entier q ne surpassant aucune des dimensions des abaques (1) (2), si l'on induit l'un par l'autre les abaques de leurs déterminants mineurs d'ordre q (**49**) en y conservant les mêmes directions aux files inductorielles, on retrouve précisément l'abaque des déterminants mineurs de même ordre q de l'abaque induit (3).*

I. Considérons d'abord le cas où les nombres n, M des files inductorielles des abaques (1) (2) étant égaux entre eux et non supérieurs à m, nombre commun de leurs files non inductorielles, l'induit (3) est carré, et où, ayant pris $q = n =$ M, il s'agit du déterminant même D de cet abaque.

Par rapport aux éléments de toute file inductorielle de l'abaque (1) considérés isolément, D est évidemment une fonction linéaire et homogène; en outre, comme l'abaque (3) devient vanescent par les colonnes chaque fois que (1) devient tel par ses files inductorielles (**63**, III), D est un covanescent de cet inducteur. On a donc (**48**)

$$(4) \qquad \mathrm{D} = k'd' + k''d'' + k'''d''' + \ldots,$$

$d', d'', \ldots$ désignant les déterminants d'ordre $q = n$ correspondant à toutes les combinaisons de q lignes de l'inducteur (1), et $k', k'', \ldots$ des quantités indépendantes des éléments de ce même abaque.

Supposons maintenant que l'on réduise à 1 chacun des éléments de la diagonale principale de d', déterminant des q premières lignes de l'inducteur (1), et à zéro tous les autres éléments du même abaque: il viendra évidemment

$$d' = 1, \quad d'' = d''' = \ldots = 0,$$

puis $D = \delta'$, déterminant des q premières colonnes de l'inducteur (2), moyennant quoi la relation (4) donne $k' = \delta'$. On trouvera de même que k'', k''', ... sont égaux à δ'', δ''', ..., déterminants formés chacun avec les q colonnes placées dans l'inducteur (2) comme le sont dans l'autre (1) les lignes ayant servi à former le déterminant correspondant de la suite d'', d''', ...

Cette relation (4) devient ainsi

$$(5) \qquad D = d'\delta' + d''\delta'' + d'''\delta''' + \ldots,$$

résultat conforme à notre énoncé pour le cas dont il s'agit.

II. Revenant maintenant au cas général, considérons le mineur μ de l'induit (3) relatif à deux combinaisons quelconques, l'une de q de ses colonnes, l'autre de q de ses lignes.

L'abaque de μ est évidemment l'induit des abaques (1), (2), réduits chacun à q files inductorielles, y occupant respectivement les mêmes places que, dans l'abaque (3), les q colonnes et les q lignes considérées.

On a donc par ce qui précède

$$\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + \ldots,$$

m_1 et μ_1, m_2 et μ_2, m_3 et μ_3, ... désignant des déterminants formés par toutes les associations possibles de q files non inductorielles, mais de rangs identiques dans les inducteurs (1) et (2) réduits aux q files inductorielles ci-dessus spécifiées.

En d'autres termes, μ est l'induit de deux certaines files inductorielles des abaques des mineurs d'ordre q des inducteurs considérés: et les choses se passent évidemment de même pour tous les mineurs

d'ordre q de l'induit (3). Il ne suffit plus maintenant que d'une légère attention pour apercevoir l'exactitude complète de notre théorème.

65. Deux cas particuliers du théorème précédent sont à remarquer.

I. Tout d'abord celui par l'examen duquel nous avons commencé notre démonstration, c'est-à-dire d'un induit carré engendré par deux inducteurs dont les files inductorielles sont en nombres égaux entre eux, mais tous deux inférieurs à celui de leurs files non inductorielles.

Supposons, pour mieux fixer les idées, que les inducteurs proposés

(6)
$$\begin{cases} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & i_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & i_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_m & b_m & c_m & \dots & i_m, \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \iota_1, \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \iota_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m & \dots & \iota_m \end{cases}$$

aient chacun m lignes inductorielles et n colonnes. D'après notre théorème, si l'on nomme $d, \dots, e, \dots, g$ les déterminants formés par les $\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}$ combinaisons de m colonnes de l'abaque (6), $\delta, \dots, \varepsilon, \dots, \gamma$ les déterminants en nombre égal formés de la même manière par les colonnes de rangs identiques dans l'abaque (7), et D le déterminant de leur induit, c'est-à-dire celui dont l'élément de la $h^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $a_h\alpha_k + b_h\beta_k + \dots + i_h\iota_k$, on a

(8)
$$D = d\delta + \dots + e\varepsilon + \dots + g\gamma.$$

II. Ensuite le cas où, n étant égal à m, les abaques ci-dessus sont tous deux carrés. La formule précédente devient alors simplement

(9)
$$D = d\delta,$$

d, δ, D désignant les déterminants des inducteurs et de leur induit.

Les formules (8), (9) sont très souvent utiles pour décomposer un déterminant tel que D en produits de déterminants plus simples où les éléments des abaques (6), (7) sont séparés, ou bien inversement, pour recomposer en un seul déterminant des expressions affectant la forme de leurs seconds membres.

Pour l'application de la formule (9) à une transformation de cette dernière espèce, il est à remarquer qu'elle donne pour D, produit des déterminants de même ordre d et δ, plusieurs déterminants tous égaux numériquement sans doute, mais n'ayant pas du tout les mêmes éléments.

Effectivement d et δ conservent les mêmes valeurs (au signe près), et l'induction de leurs abaques peut toujours s'exécuter ligne à ligne, si l'on y permute arbitrairement soit des lignes, soit des colonnes, ou bien encore si l'on y change les lignes en colonne, et *vice versa*.

Parmi les diverses manières de disposer ainsi les abaques de d et de δ, il y en a $4 \times 1.2\ldots m$ donnant des abaques induits différant entre eux par autre chose que l'ordre de succession des files; c'est un dénombrement que chacun fera sans difficulté.

66. Nous pouvons actuellement revenir au système simple des formes linéaires

$$(10) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_m$$

aux variables $x, y, z, \ldots, v$, ayant (1) pour abaque, dont la composition avec le système composant

$$(11) \qquad F_1, F_2, \ldots, F_M$$

aux variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ayant (2) pour abaque, engendre le système composé

$$(12) \qquad f'_1, f'_2, \ldots, f'_M$$

aux variables $x, y, z, \ldots, v$ ayant (3) pour abaque, ce dernier pouvant être considéré aussi comme résultant de l'induction mutuelle de

la file des formes simples et de l'abaque (2) par les lignes de ce dernier. Les principes ci-dessus établis donneront immédiatement les propositions particulières qui vont suivre :

Le déterminant de q des formes composées (12) relatif à un certain groupe de q des variables $x, y, \ldots, v$ est égal à la somme des produits des déterminants des q formes correspondantes dans le système composant (11) pris par rapport à chacune des combinaisons de q de leurs propres variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, multipliés respectivement par les déterminants relatifs au groupe considéré des variables $x, y, \ldots, v$, des combinaisons des q formes du système simple (10) qui sont affectées des mêmes indices.

Cet énoncé fait ressortir une analogie à remarquer, entre la composition des systèmes de formes linéaires et la théorie ordinaire des fonctions composées; le rôle des dérivées des fonctions simples, composante et composée, est rempli ici par des déterminants qui, dans bien d'autres circonstances d'ailleurs, se comportent comme des dérivées.

67. *Le système composé est réductible quand le système composant l'est lui-même* (**65**, III).

Si le système composé est réductible, de deux choses l'une : ou le système composant l'est lui-même, ou bien c'est le système simple qui jouit de cette propriété (**65**, IV).

68. *L'abaque des déterminants mineurs du système composé, d'ordre q (ne surpassant ni n, ni m, ni M), est l'induit, colonne à ligne, de ceux des mineurs de même ordre q du système simple et du composant* (**64**).

Cette proposition établit une relation générale très importante entre les mineurs d'un même ordre quelconque, de deux systèmes agrégés de formes linéaires et ceux de leur abaque d'agrégation.

69. Après avoir induit le système des m formes (10) par les M lignes de l'abaque (2), de manière à obtenir le système agrégé (12) de M formes, on peut induire ce dernier par un nouvel abaque de M colonnes et d'un nombre quelconque de lignes. On obtient ainsi un troisième système agrégé à (12), partant à (10), et qui, par suite, peut

se calculer en induisant *une seule fois* le système (10) par les lignes d'un abaque de multiplicateurs convenables.

Il est évident *que ce troisième abaque, résultant ainsi de la composition des deux autres, est l'induit du premier par le second, colonne à ligne, écrit de manière à avoir ses lignes agrégées à celles du premier.*

On peut ainsi composer en une seule, des inductions successives du système (10) par des abaques en nombre quelconque; *l'abaque résultant est le résultat final de l'induction colonne à ligne de tous les abaques élémentaires laissés dans l'ordre où ils sont donnés.* La nécessité de prendre pour lignes de chaque induit partiel ses files agrégées à celles du précédent s'oppose à ce que l'on puisse modifier cet ordre; dans certains cas d'ailleurs, on rendrait ainsi l'induction impossible.

Entre les mineurs d'un même ordre q, tant du système (10) que des abaques par lesquels on l'induit successivement, et ceux du système de formes, résultat final de toutes ces inductions, il existe des relations analogues à celles résultant du théorème (**64**) pour le cas d'un seul tableau de multiplicateurs. *L'abaque des derniers mineurs peut s'obtenir en induisant convenablement celui des premiers successivement par tous ceux des seconds.*

70. Quand l'abaque (2) est carré et invanescent, son déterminant Δ est différent de zéro, et il y a lieu de remarquer tout spécialement, parmi ceux que l'on peut composer avec lui, l'abaque également carré

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} \frac{(\lambda_1)}{\Delta} & \frac{(\mu_1)}{\Delta} & \cdot\ \cdot & \frac{(\varpi_1)}{\Delta}, \\ \frac{(\lambda_2)}{\Delta} & \frac{(\mu_2)}{\Delta} & \cdot\ \cdot & \frac{(\varpi_2)}{\Delta}, \\ \frac{(\lambda_m)}{\Delta} & \frac{(\mu_m)}{\Delta} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{(\varpi_n)}{\Delta}, \end{matrix}\right.$$

dont les diverses lignes ont pour éléments les quotients par Δ des mineurs complémentaires (**50**) des éléments des diverses colonnes de (2). Effectivement, si l'on a égard aux relations (5), (6) du numéro cité.

tion colonne à ligne de (2) par (13) donne l'abaque

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0, \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0, \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0, \\
. & . & . & \ldots & .. \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1,
\end{array}
\right.
$$

par lequel l'induction du système (10) en reproduit identiquement toutes les formes.

Dans ce cas, l'induction d'un système de formes par l'abaque (2) est une opération *réversible* comme la multiplication d'une quantité par une autre différente de zéro, en ce sens que l'on peut détruire son effet par une opération inverse de même nature.

Il est évident que l'on retomberait encore sur le système (10) en l'induisant d'abord par (13), puis par (2), plus généralement par deux abaques carrés quelconques *inverses* l'un de l'autre, c'est-à-dire ayant pour induit l'abaque-*unité* (14). Celui-ci est à lui-même son propre inverse.

Le produit des déterminants de deux abaques inverses l'un de l'autre est égal à 1, valeur numérique de leur induit (14).

71. Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire d'une induction par l'abaque (2) supposé carré et invanescent, *le système induit* (12) et *le proposé* (10) *sont équivalents*, chacun d'eux étant agrégé à l'autre, puisqu'il résulte de son induction par quelque abaque de multiplicateurs.

Plus généralement, ces deux systèmes sont toujours équivalents quand l'abaque (2) est invanescent par les colonnes, ce qui exige qu'il n'en ait pas plus que de lignes; on le constate sans difficulté.

72. La combinaison des notions précédentes conduit à d'autres propositions dont les deux suivantes sont à remarquer.

L'abaque (1) et celui de ses mineurs d'ordre q (non supérieur à m ni à n) sont tous deux en même temps vanescents ou invanescents par des files de même nom.

Nous raisonnerons pour les lignes. La chose est évidente si $m > n$, car les abaques considérés (A), (A_q) ont chacun plus de lignes que de

colonnes, et par suite (**12**) sont tous deux vanescents par les lignes.

Elle l'est encore si $m \leqq n$ et $q = m$; car $(A)_q$ n'a qu'une ligne dont les éléments sont les déterminants majeurs de (A), lesquels sont tous nuls ou non selon que (A) est vanescent ou invanescent (**48**), (**42**).

Dans le cas où $m \leqq n$, et $q < m$, supposons d'abord vanescent l'abaque (A). Si tous ses mineurs d'un certain ordre $q' \leqq q$ sont nuls, ceux d'ordres $q'+1, q'+2, \ldots, q$ le sont tous aussi, ces derniers notamment, qui servent d'élément à $(A)_q$, et cet abaque est vanescent.

S'il en est autrement, (A) est équivalent par les lignes, par suite agrégé, à un abaque partiel (a) composé de quelques-unes de ses lignes en nombre au moins égal à q (**54**). L'abaque $(A)_q$ est donc agrégé par les lignes à $(a)_q$, abaque des mineurs d'ordre q de (a) (**64**), c'est-à-dire à l'abaque partiel formé par quelques-unes seulement de ses propres lignes; il est donc vanescent (**9**).

Supposons, au contraire, que $(A)_q$ soit vanescent et contienne, par suite, quelque ligne agrégée aux autres; nommons $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ ceux des mineurs de cette ligne dont les éléments appartiennent aux m premières colonnes de (A), et aussi $\delta'', \delta''', \ldots; \ldots; \theta'', \theta''', \ldots; \ldots; \tau'', \tau''', \ldots$, les mineurs des autres lignes de $(A)_q$ qui se trouvent dans les mêmes colonnes que $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ respectivement. Par hypothèse, on a en particulier des relations

$$
\begin{gathered}
\delta' = \mu''\delta'' + \mu'''\delta''' + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\theta' = \mu''\theta'' + \mu'''\theta''' + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau' = \mu''\tau'' + \mu'''\tau''' + \ldots,
\end{gathered}
$$

qui, induites par les mineurs complémentaires de $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ dans le déterminant Δ des m premières colonnes de (A), donnent

$$\Delta = 0$$

en ayant égard aux relations du n° **50**.

Ainsi Δ est nul, et l'on prouverait de même qu'il en est ainsi pour tout autre déterminant de m colonnes de l'abaque (1); donc cet abaque est vanescent par les lignes (**48**), (**42**).

75. *Supposons irréductible le système* (10) *ainsi qu'un autre*

$$(15) \qquad f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_{m'},$$

de m' ($\leqq m$) *formes linéaires.*

Pour que ce second système soit agrégé au premier, il est nécessaire et suffisant que l'abaque de ses mineurs d'un ordre quelconque q (*non supérieur à* m') *soit agrégé par les lignes à celui des mineurs de même ordre du premier.*

La nécessité de la condition posée résulte immédiatement du théorème du nº **68**, et nous avons seulement à prouver qu'elle est suffisante.

Soit d'abord $q = m'$; admettons, pour fixer les idées, que Δ', déterminant du système (15) par rapport à ses m' premières variables $x, y, z, \ldots, p$, est l'un de ceux qui, par hypothèse, ne s'évanouissent pas, et nommons $\Delta'_{xr}, \ldots, \Delta'_{xs}, \ldots, \Delta'_{xt}, \ldots, \Delta'_{xv}$ ceux qui lui sont contigus (**58**) par ses $m-1$ dernières colonnes. Associons en outre à m' de toutes les manières possibles les m formes du système (10), et dans les $M = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-m'+1)}{1.2\ldots m'}$ systèmes partiels ainsi obtenus nommons respectivement

$$(16) \qquad \begin{cases} {}'\Delta & {}'\Delta_{xr} & \ldots & \ldots & {}'\Delta_{xv} \\ {}''\Delta & {}''\Delta_{xr} & \ldots & \ldots & {}''\Delta_{xv} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^{M}\Delta & {}^{M}\Delta_{xr} & \ldots & \ldots & {}^{M}\Delta_{xv} \end{cases}$$

les déterminants semblables à ceux de la suite

$$(17) \qquad \Delta',\ \Delta'_{xr},\ \ldots,\ \Delta'_{xs},\ \Delta'_{xt},\ \Delta'_{xv},$$

c'est-à-dire pris par rapport aux mêmes variables.

La ligne (17) étant agrégée par hypothèse à celles de l'abaque (16), la forme X', dans laquelle les variables $x, y, z, \ldots, p, r, \ldots, s, t, \ldots, v$ ont pour coefficients Δ', 0, 0, ..., 0, $\Delta'_{xr}, \ldots, \Delta'_{xs}, \Delta'_{xt}, \ldots, \Delta'_{xv}$ respectivement, est agrégée aux M formes 'X, ''X, ..., ^{M}X construites de la même manière avec les diverses lignes de l'abaque (16). Mais, d'après le nº **59**, chacune des formes 'X, ..., ^{M}X est agrégée à celui des M systèmes partiels de m' formes du système (10), dont les déterminants lui ont fourni des coefficients, partant à ce système (10) tout entier; la forme X' qui leur est agrégée l'est donc aussi au même système.

Cela posé, dans le système $(\Sigma)'$ en réduction apparente aux m variables saillantes $x, y, z, \ldots, p$, qui est équivalent à (15), X' est précisément la forme où x a un coefficient différent de zéro; quant aux $m' - 1$ autres formes Y', Z', ... P' de $(\Sigma)'$, on prouverait de même que chacune d'elles est aussi agrégée à (10).

Le système $(\Sigma)'$ étant ainsi agrégé à (10), son équivalent (15) jouit de la même propriété, ce qu'il fallait établir.

Supposons maintenant $q < m'$ et prenons au hasard q des formes (15). Comme les déterminants de ce système partiel ne peuvent tous s'évanouir, puisque, s'il en était autrement, lui et, par suite, le système (15) dont il est une partie ne seraient pas irréductibles, contrairement à l'hypothèse, il résulte de ce qui précède que chacune de ses q formes est agrégée au système (10); on prouve de même qu'il en est ainsi pour toute autre forme du système (15), qui est bien ainsi agrégé à (10).

74. Dans le cas particulièrement intéressant où $m' = m$, et où l'on considère les déterminants proprement dits ou majeurs des deux systèmes, le théorème précédent fournit sous une forme très élégante les conditions de leur équivalence : *il faut et il suffit que leurs déterminants semblables soient proportionnels*. Le rapport invariable des seconds aux premiers est évidemment égal au déterminant de l'abaque d'agrégation du second système au premier.

75. La question suivante est encore au fond une composition de certains systèmes de formes linéaires; mais, ici, c'est au système simple qu'appartient le rôle moins saillant.

On appelle *substitution linéaire* l'opération consistant à transformer un système donné m formes (linéaires ou non) à n variables $x, y, \ldots, v$, en un autre de m formes toujours, mais à n' $(= n)$ nouvelles variables $x', y', \ldots, t'$ par la substitution à $x, y, \ldots, v$, des formes linéaires qui servent de seconds membres aux relations

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \ldots + \varepsilon'_1 t', \\ y = \alpha'_2 x' + \beta'_2 y' + \ldots + \varepsilon'_2 t', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v = \alpha'_n x' + \beta'_n y' + \ldots + \varepsilon'_n t'; \end{array} \right.$$

l'*abaque* de la substitution est celui même des nouvelles formes dont il s'agit. Le système transformé est ainsi composé du système primitif, ici composant, et de celui des formes de la substitution, ici simple. Il y a, bien entendu, des substitutions de degrés supérieurs au premier ; mais elles augmentent les degrés des formes sur lesquelles on les exécute, et n'ont pas à cause de cela la même importance que les substitutions linéaires.

En opérant la substitution linéaire (18) dans un système de formes linéaires tel que (10), on obtient évidemment un système transformé

$$(19)\qquad f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_m$$

également linéaire, *dont l'abaque*

$$(20)\quad \left\{\begin{matrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+\dots+j_1\alpha_n, & a_1\beta_1+b_1\beta_2+\dots+j_1\beta_n, & \dots, & a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2+\dots+j_1\varepsilon_n, \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+\dots+j_2\alpha_n, & a_2\beta_1+b_2\beta_2+\dots+j_2\beta_n, & \dots, & a_2\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\dots+j_2\varepsilon_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m\alpha_1+b_m\alpha_2+\dots+j_m\alpha_n, & a_m\beta_1+b_m\beta_2+\dots+j_m\beta_n, & \dots, & a_m\varepsilon_1+b_m\varepsilon_2+\dots+j_m\varepsilon_n \end{matrix}\right.$$

s'obtient en induisant ligne à colonne, celui du système primitif (10) *par celui de la substitution*, cet induit étant écrit de manière à avoir pour lignes ses files agrégées aux lignes de son second inducteur.

76. Il suffit donc de modifier tant soit peu dans la forme nos propositions générales sur la composition des systèmes de formes linéaires (nos **66** et suiv.), pour obtenir celles qui concernent les substitutions linéaires. Par exemple :

L'abaque des déterminants mineurs d'ordre q, non supérieur au plus petit des nombres m, n, n' du système (19) *est l'induit ligne à colonne de ceux des mineurs de même ordre, tant du système primitif* (10) *que de la substitution* (18).

On bien encore :

Le déterminant de q des formes (19) *par rapport à q des nouvelles va-*

riables x', y', ..., t' est égal à la somme des produits des déterminants des q formes de mêmes indices dans le système (10) *relatifs à tous les groupes différents de q des anciennes variables x, y, ..., v, multipliés par les déterminants relatifs aux q nouvelles variables considérées, des mêmes groupes formés avec les seconds membres des relations* (18) (**66**).

77. *Le système* (19) *est réductible si le système primitif* (10) *l'est lui-même.*

Si ce nouveau système est réductible, du système primitif ou de celui des formes (18), *l'un l'est certainement aussi* (**67**).

78. On peut composer une première substitution linéaire telle que (18) avec une seconde remplaçant les n' variables x', y', ..., t' du nouveau système (19) par n'' autres x'', y'', ...; l'*abaque de la substitution résultante est évidemment l'induit, ligne à colonne, de ceux de la première substitution simple et de la seconde*, cet induit étant écrit de manière à avoir pour lignes ses files agrégées à celles du second inducteur.

En raisonnant comme au n° **69**, on aperçoit facilement les particularités relatives à la composition en une seule de tant de substitutions simples que l'on voudra.

79. La substitution (18) est *réversible* dans le cas très important où son abaque est carré et invanescent; car son déterminant Δ n'étant pas nul, sa composition avec la substitution *inverse* ayant pour abaque

$$\begin{matrix} \frac{'\alpha_1}{\Delta} & \frac{'\alpha_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\alpha_n}{\Delta} \\ \frac{'\beta_1}{\Delta} & \frac{'\beta_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\beta_n}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{'\varepsilon_1}{\Delta} & \frac{'\varepsilon_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\varepsilon_n}{\Delta} \end{matrix}$$

$'\alpha_1$, ... désignant les mineurs complémentaires des éléments α_1, ...

de Δ, donne la substitution d'abaque

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

qui est *identique*, c'est-à-dire laisse sans aucun changement tous les coefficients du système primitif (**70**). La substitution inverse permet donc de revenir du nouveau système (19) à celui d'où il a procédé par la première substitution.

Réciproquement, la première substitution est l'inverse de son inverse et leurs déterminants ont pour produit 1, déterminant de l'abaque (21) de leur substitution résultante.

Plus généralement, la substitution (18) est toujours réversible quand son abaque est invanescent par les lignes, quel qu'en soit le nombre.

80. La question que nous allons traiter se rattache d'une manière très indirecte à l'ensemble du présent paragraphe; mais elle serait encore moins bien placée ailleurs.

Généralisant la définition donnée au nº **10**, nous dirons encore qu'il y a *symptose par les lignes entre les abaques*

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & j_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m \end{vmatrix}$$

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \zeta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \zeta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_\mu & \beta_\mu & \gamma_\mu & \ldots & \zeta_\mu \end{vmatrix}$$

tous deux de n colonnes, mais de lignes en nombres relatifs arbitraires, si deux lignes quelconques prises dans l'un et dans l'autre sont en symptose. Tels sont, par exemple, l'abaque d'un système d'équa-

tions linéaires et homogènes, et celui que forment quelques files de solutions de ces équations.

81. *Si les abaques* (22), (23) *sont en symptose par les lignes, il en est encore ainsi pour deux autres quelconques qui leur sont respectivement agrégés par les lignes.*

Soient (22)′ et (23)′ les deux abaques agrégés aux proposés, et considérons (22) et (22)′ comme appartenant à deux systèmes d'équations linéaires et homogènes aux n mêmes inconnues. Les lignes de (23) sont des files de solutions pour le premier système, à cause de la symptose supposée, et par suite pour le second, puisqu'il est agrégé au premier (**27**). Celles de (23)′ sont donc aussi des files de solutions pour le second système, puisqu'elles sont agrégées à celles de (23) (**51**). Donc il y a symptose entre chacune d'elles et l'abaque (22)′, qui appartient à ce système.

82. *Les mêmes choses étant posées, les abaques des déterminants mineurs d'un même ordre q (non supérieur à n, m, μ) de* (22), (23) *sont aussi en symptose par les lignes.*

En induisant ligne à ligne les deux abaques proposés, on en forme un troisième dont tous les éléments sont nuls par hypothèse, et par suite aussi tous ceux de l'abaque de ses déterminants mineurs d'ordre q.

Or ce dernier abaque est précisément l'induit, ligne à ligne, de ceux des mineurs d'ordre q des proposés (**64**) ; ces deux derniers abaques sont donc en symptose par les lignes, puisque les éléments de leur induit sont tous nuls.

83. *Les abaques* (22), (23) *ne peuvent être invanescents tous deux par les lignes s'ils sont en symptose de cette manière, et si le nombre total $m+\mu$ de ces dernières surpasse le nombre commun n de leurs colonnes.*

Si le premier abaque est invanescent, il appartient à quelque système irréductible (S) d'équations linéaires et homogènes, qui, à cause de la symptose supposée, admet chaque ligne du second abaque pour file de solutions.

Si donc $m=n$, le système (S) est déterminé, et chaque ligne du second abaque est vanescente (**29**). Si $m<n$, prenons au hasard

$(n - m) < \mu$) lignes dans le second abaque; ou bien cet abaque partiel est vanescent, et notre proposition est établie; ou bien il est invanescent, et alors chacune des $\mu - (n - m)$ autres lignes de l'abaque (23) lui est forcément agrégée (**31**).

84. Nous dirons que les abaques (22), (23) sont *supplémentaires* s'ils sont en symptose par les lignes, et si le nombre total $m + \mu$ de celles-ci est précisément égal au nombre commun n de leurs colonnes.

Si les abaques (22), (23) *sont supplémentaires et invanescents, tout autre en symptose avec l'un est agrégé à l'autre.*

Le second abaque peut être considéré comme composé de files de solutions cardinales (**31**) du système d'équations linéaires et homogènes qui a les éléments du premier pour coefficients, et le troisième comme composé, par exemple, de files quelconques de solutions des mêmes équations. Cela posé, le point en question est une conséquence immédiate du numéro cité.

Deux abaques sont donc équivalents quand, par les lignes, ils sont invanescents et supplémentaires à un même autre invanescent; par ce qui précède, chacun d'eux est effectivement agrégé à l'autre.

85. La réunion de deux abaques supplémentaires donne un abaque total évidemment carré, dont chaque déterminant de l'un des proposés est un mineur ayant pour mineur complémentaire (**30**) un certain déterminant de l'autre abaque. Nous appellerons *supplémentaires* deux déterminants de nos abaques, qui sont ainsi mineurs mutuellement complémentaires dans l'abaque carré ci-dessus mentionné. Cela posé, on a ce théorème :

Si les abaques (22), (23) *sont supplémentaires, des deux lignes formées par leurs déterminants supplémentaires écrits de manière à y occuper respectivement les mêmes places, l'une est agrégée à l'autre.*

1° Voici d'abord un lemme qui est utile dans plusieurs circonstances :

Dans un même abaque de dimension minimum m, deux déterminants non nuls sont toujours les extrêmes de quelque suite d'autres non nuls aussi, dont chacun est contigu au suivant (**38**) *par $m - 1$ files de cette dimension.*

Soient, par exemple, $(abc\bar{\omega})$, $(hij\bar{\omega})$ deux déterminants non nuls de l'abaque (22), ayant $m-3$ colonnes communes dont l'ensemble a été représenté par $\bar{\omega}$. Chacune des colonnes du second est agrégée à celles du premier, dont l'abaque est carré et invanescent par hypothèse (**18**), et l'on a en particulier

$$h_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \ldots,$$
$$h_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$(hij\bar{\omega}) = \lambda(aij\bar{\omega}) + \mu(bij\bar{\omega}) + \nu(cij\bar{\omega}),$$

car les déterminants déduits de $(hij\bar{\omega})$ par la substitution à la colonne h, de l'une de celles de l'ensemble $\bar{\omega}$, ont chacun deux colonnes identiques et s'évanouissent tous. Les déterminants $(aij\bar{\omega})$, $(bij\bar{\omega})$, $(cij\bar{\omega})$, dont chacun est contigu à $(hij\bar{\omega})$ par $m-1$ colonnes, ne peuvent donc pas être tous nuls, puisque celui-ci ne l'est pas. Comme tous ont $m-2$ colonnes appartenant à $(abc\bar{\omega})$, il existe quelque déterminant non nul qui est contigu à $(hij\bar{\omega})$ et possède une colonne de plus que lui commune avec $(abc\bar{\omega})$. En poursuivant ce raisonnement à partir de ce nouveau déterminant, on réussira évidemment à insérer entre les proposés une suite de déterminants non nuls et contigus chacun à ses deux voisins.

2° Notre théorème est évident quand l'une des deux lignes des déterminants mentionnés dans l'énoncé est vanescente, et nous avons à considérer seulement le cas où dans chacune d'elles il existe quelque déterminant non nul.

On peut alors considérer l'abaque (22) comme appartenant au système irréductible (3) du n° **29**, et l'autre (23) comme un abaque cardinal de solutions de ces équations.

Soient $(abc\ldots g)$ un déterminant non nul de l'abaque (22), $(abc\ldots h)$ un de ses contigus non nuls (s'il en existe), et $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ les déterminants des coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les $n-m$ dernières formules (24) du n° **35**, et dans la $m^{\text{ième}}$ suivie des

$n - m - 1$ dernières, respectivement. Des relations évidentes

$$(t\ldots uv) = (abc\ldots g)^m,$$
$$(s\ldots uv) = -(abc\ldots g)^{m-1}(abc\ldots h),$$

on conclut que $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ ne sont pas nuls non plus et que l'on a entre ces quatre déterminants la relation

$$\frac{(abc\ldots g)}{(t\ldots uv)} = -\frac{(abc\ldots h)}{(s\ldots uv)}.$$

Maintenant les abaques (23) et (A), ce dernier ayant pour lignes les files de coefficient de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les formules citées (24, n° **55**) sont équivalents, puisqu'ils sont l'un et l'autre cardinaux pour un même système d'équations linéaires, et ceux de leurs déterminants semblables qui ne sont pas simultanément nuls sont proportionnels (**74**). Donc $(\eta\ldots\iota\check{\zeta})$, $(\chi\ldots\iota\check{\zeta})$, déterminants de (23) semblables à $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ déterminants de (A), ne sont pas nuls, et l'on a

$$\frac{(t\ldots uv)}{(\eta\ldots\iota\check{\zeta})} = \frac{(s\ldots uv)}{(\chi\ldots\iota\check{\zeta})},$$

proportion dont la combinaison avec la précédente donne

$$(24) \qquad \frac{(abc\ldots g)}{(\eta\ldots\iota\check{\zeta})} = -\frac{(abc\ldots h)}{(\chi\ldots\iota\check{\zeta})},$$

et les dénominateurs sont évidemment les déterminants supplémentaires des numérateurs, ou tout au moins ces supplémentaires multipliés tous deux par -1. En d'autres termes, si deux déterminants non nuls de (22) sont contigus, leurs supplémentaires dans (23) ne le sont pas non plus et sont proportionnels aux premiers. En vertu de notre lemme (1°), cette conclusion s'étend d'elle-même au cas où les déterminants non nuls considérés ne sont pas contigus, ce qui achève évidemment notre démonstration.

Une autre démonstration peut être tirée de considérations toutes différentes : un déterminant non nul de l'abaque (22) associé dans un

ordre convenable à ses contigus et à $m - 1$ zéros forme une ligne de quantités qui est agrégée à l'abaque en question (**59**). Le supplémentaire de ce déterminant, ses contigus et $\mu - 1$ zéros forment de même une ligne agrégée au second abaque. Cela posé, si l'on exprime que les deux lignes ainsi obtenues sont en symptose (**81**), on retrouvera une proportion telle que (24).

En prenant dans nos deux abaques deux groupes, l'un de $q (< m)$, l'autre de $\chi (\leq \mu)$ lignes, puis formant par le même procédé deux lignes composées de zéros et de déterminants contigus d'ordres q et χ, qui soient respectivement agrégés à ces deux abaques partiels, puis écrivant qu'elles sont en symptose (**81**), on obtient, entre les mineurs d'ordres q et χ des abaques considérés, des relations analogues à celles ci-dessus établies pour leurs déterminants majeurs. Mais chacune de ces relations a plus de deux termes.

86. *Réciproquement, les abaques* (22) (23) *sont en symptose s'ils sont invanescents et si, le nombre total* $m + \mu$ *de leurs lignes égalant le nombre commun* n *de leurs colonnes, les déterminants de l'un sont proportionnels à ceux que l'on obtient en associant dans l'ordre ci-dessus spécifié les colonnes de rangs différents dans l'autre.*

Un abaque quelconque (A) de solutions cardinales du système d'équations linéaires et homogènes d'abaque (22) est évidemment supplémentaire à celui-ci; il en résulte (**85**) que les déterminants de (A) sont proportionnels à ceux de (22) et par suite à ceux de (23), que l'on suppose tels par rapport à ces derniers. Les abaques (A) et (23) sont donc équivalents (**74**), puisque leurs dimensions sont respectivement égales; donc (23) est en symptose avec (22) comme son équivalent (A) (**81**), et ces deux abaques sont bien supplémentaires, puisque le nombre total de leurs lignes est égal à celui de leurs colonnes.

Cette proposition fournit un nouveau moyen de vérifier si un abaque invanescent donné, de $n - m$ lignes et de n colonnes, est cardinal pour un système donné irréductible de m équations linéaires et homogènes à n inconnues.

Relations entre les déterminants majeurs et mineurs d'un même système de formes linéaires.

87. Relativement aux éléments de l'abaque d'un système donné de formes linéaires, que nous considérerons désormais comme autant de variables indépendantes, les déterminants majeurs et mineurs du système sont des fonctions exactement définies qui sont habituellement en nombre beaucoup plus considérable. On voit ainsi *a priori* qu'il doit exister entre tous ces déterminants des identités fort nombreuses. Nous allons donner une méthode générale pour les former, en nous bornant toutefois à signaler les plus intéressantes.

Quelquefois nos raisonnements supposeront que les valeurs particulières des éléments considérés ne rendent pas certains abaques vanescents; mais les relations trouvées n'en seront pas moins générales, car elles sont entières par rapport à ces éléments, ou peuvent être amenées à revêtir une pareille forme. D'ailleurs, dans les cas exceptionnels dont il s'agit, elles deviennent évidentes ou peuvent, tout au moins, être établies directement avec une facilité extrême.

Soient

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & j_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & j_m \end{vmatrix}$$

l'abaque d'un système de m formes linéaires à n ($\geqq m$) variables, et q', q'', …, $q^{(i)}$ des entiers quelconques chacun $< m$, mais dont la somme Q soit supérieure à m. Prenons arbitrairement q' des formes données et, avec des déterminants contigus du système partiel qu'elles constituent, construisons (57) l'abaque $|q'|$ d'un système équivalent en réduction apparente. Soient encore $|q''|$, …, $|q^{(i)}|$ des abaques construits de même avec des systèmes partiels de q'', …, $q^{(i)}$ formes empruntées tout à fait au hasard au système proposé. Cela posé, l'abaque $|Q|$ formé par la réunion de $|q'|$, $|q''|$, …, $|q^{(i)}|$ est vanescent par les lignes, et ses déterminants mineurs d'ordres supérieurs à m sont tous nuls.

Chaque ligne de l'abaque $|Q|$ est agrégée à l'abaque du système partiel dont les déterminants lui ont fourni des éléments (59), et par

suite aussi à l'abaque (1) tout entier. Considérons m quelconques de ces lignes : si leur abaque (A) est invanescent, il est équivalent à (1) parce qu'il lui est agrégé et a même hauteur (**19**) ; une autre ligne quelconque de [Q] lui est donc aussi agrégée ; il en résulte que l'abaque de ces $m+1$ lignes est vanescent, et par suite que tous ses déterminants sont nuls. Or ce sont précisément des mineurs quelconques d'ordre $m+1$ de [Q].

Si (A) est vanescent, l'abaque ci-dessus considéré de $m+1$ lignes l'est aussi : ce qui conduit à la même conclusion.

Comme les éléments des abaques $[q']$, $[q'']$, ..., $[q^{(i)}]$ sont, outre quelques zéros, des mineurs d'ordres q', q'', ..., $q^{(i)}$ du proposé, quelquefois des majeurs, chaque équation exprimant la nullité des mineurs d'ordre $m+1$ de [Q] est une relation entre ces déterminants mineurs ou majeurs.

On obtient des relations différentes des précédentes, ou tout au moins présentant une autre forme, en remarquant que l'abaque des mineurs d'un ordre quelconque de [Q] est aussi vanescent (**72**), et égalant à zéro des déterminants mineurs d'ordres convenables de ce nouvel abaque.

Enfin on en trouvera d'autres encore, en appliquant les considérations précédentes à l'abaque des déterminants mineurs d'un ordre quelconque de (1).

88. Voici une autre manière de former des relations de cette espèce : en supposant d'abord invanescent l'abaque (A) du numéro précédent, quelques autres lignes de l'abaque [Q] forment, comme nous l'avons vu, un abaque (B) qui lui est agrégé. Cela posé, on cherchera l'abaque d'agrégation (K) de (B) à (A), et l'on écrira que l'abaque des mineurs d'un ordre donné de (B) est l'induit des abaques de mineurs du même ordre de (A) et de (K) (**64**).

Pour la cause indiquée ci-dessus (**87**), les relations ainsi obtenues ont lieu, même quand l'abaque (A) n'est pas invanescent.

Nous faisons ci-après une application importante de ces diverses considérations.

89. Prenant égal à $m+1$ le nombre total i des entiers q', q'', ..., $q^{(i)}$

du n° **87**, nous ferons les m premiers égaux à 1, le dernier à m, et nous formerons l'abaque (Q) en adjoignant au proposé lui-même (1) l'abaque équivalent par les lignes, mais en réduction apparente :

$$
(2)\qquad \left|\begin{array}{cccccccc}
d & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{ah} & \ldots & d_{aj}, \\
0 & d & 0 & \ldots & 0 & d_{bh} & \ldots & d_{bj}, \\
0 & 0 & d & \ldots & 0 & d_{ch} & \ldots & d_{cj}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots, \\
0 & 0 & 0 & \ldots & d & d_{gh} & \ldots & d_{gj}.
\end{array}\right.
$$

Ici d représente le déterminant des m premières colonnes de (1), et $d_{ah}, \ldots, d_{aj}; \ldots, d_{gj}$ les déterminants contigus s'en déduisant par la substitution à la colonne a de la colonne $h, \ldots$, à la même de la colonne $j; \ldots$, à la colonne g de la colonne j. Pour l'abaque (A) du numéro précédent, nous prendrons (1) et, pour (B), celui qui vient d'être écrit. Nous construirons d'une même manière les abaques $(\mathrm{A})_q$, $(\mathrm{B})_q$ des mineurs d'un même ordre $q < m$ de (A) et de (B), qui ont chacun des lignes en nombre égal à $\mathrm{M} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$, et nous ferons en sorte que le dernier soit

$$
(3)\qquad \left|\begin{array}{cccccccc}
d^q & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & d^q & \ldots,
\end{array}\right.
$$

c'est-à-dire que les M premières places y soient occupées par les colonnes dont les éléments sont exclusivement formés avec ceux des m premières colonnes de (2). Mettant en évidence les M premières colonnes de $(\mathrm{A})_q$, dont les éléments ne dépendent aussi que de ceux des m premières colonnes de (1), nous l'écrirons

$$
(4)\qquad \left|\begin{array}{ccccccc}
\delta'_1 & \ldots & \varsigma'_1 & \ldots & \tau'_1 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\delta_{\mathrm{M}} & \ldots & \varsigma_{\mathrm{M}} & \ldots & \tau_{\mathrm{M}} & \ldots
\end{array}\right.
$$

Cela posé, on a ce qui suit :

I. — *L'abaque d'agrégation* $(K)_q$ *de* (3) *à* (4) *est*

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} d^{q-1}{}'\delta_1 \;\ldots\; d^{q-1}{}'\mathfrak{G}_1 \;\ldots\; d^{q-1}{}'\tau_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{q-1}{}'\delta_M \;\ldots\; d^{q-1}{}'\mathfrak{G}_M \;\ldots\; d^{q-1}{}'\tau_M, \end{array}\right.$$

$'\delta_1, \ldots, '\tau_M$ *désignant les complémentaires* (*d'ordre* $m-q$ *par conséquent*) (**50**) *de* $\delta'_1, \ldots, \tau'_M$ *considérés comme mineurs du déterminant* d *des* m *premières colonnes de* (1).

L'induction des m premières colonnes de $(A)_q$ par la première de $(K)_q$ devant fournir les m premiers éléments de la première ligne de (3), on a, entre les éléments de la première colonne de $(K)_q$, les m équations linéaires non homogènes aux M inconnues $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$,

$$\begin{array}{l} \delta'_1\,\delta_1 + \ldots + \delta'_M\,\delta_M = d^q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{G}'_1\,\delta_1 + \ldots + \mathfrak{G}'_M\,\delta_M = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \tau'_1\,\delta_1 + \ldots + \tau'_M\delta_M = 0. \end{array}$$

Comme nous supposons d non $= 0$, ce système d'équations est déterminé, car l'abaque des coefficients des inconnues est composé des mêmes files que celui des M premières colonnes de (4), c'est-à-dire que l'abaque des mineurs d'ordre q de celui des m premières colonnes de (1), lequel est invanescent, puisque ce dernier l'est (**72**).

En vertu des formules (5), (6) du n° **50**, ces équations auraient pour solutions $'\delta_1, \ldots, '\delta_M$, si l'on divisait tous leurs seconds membres par d^{q-1}. Donc elles n'ont pas d'autres solutions que les produits de ces quantités par d^{q-1}, produits qui sont précisément les éléments de la première colonne de (5). Même raisonnement pour les autres colonnes de $(K)_q$.

II. *Le déterminant* $'\Delta$ *de l'abaque d'agrégation* (5) *est donné par la formule*

$$(6)\qquad '\Delta = d^{(m-1)\frac{qM}{m}}.$$

L'induction des M premières colonnes de (4) par celles de ('K)$_q$ reproduisant l'abaque des M premières de (3), le produit de leur déterminant Δ' par $'\Delta$ est égal à celui de ce dernier abaque (65, II), d'où l'identité

$$(7) \qquad \Delta'\,'\Delta = d^{q\mathrm{M}}.$$

Mais, par rapport à ses éléments, d étant un polynôme premier (47), on conclut facilement de cette identité que deux certaines puissances de d, dont les exposants ϖ', $'\varpi$ ont une somme égale à qM, divisent Δ' et $'\Delta$ respectivement, en donnant des quotients constants [1].

Les degrés totaux de $'\Delta$, d par rapport aux éléments de ce dernier déterminant, étant $\mathrm{M}(m-1)q$ et m respectivement, on a

$$m\,'\varpi = \mathrm{M}(m-1)q,$$

d'où

$$'\varpi = (m-1)\frac{q\mathrm{M}}{m}.$$

En réduisant, d'autre part, à 1 les éléments principaux de l'abaque de d, et à zéro tous les autres, il viendra évidemment $d = {'\Delta} = 1$; le quotient de $'\Delta$ par $d^{'\varpi}$ est donc égal à 1, ce qui achève la vérification de la formule (6).

En raisonnant de la même manière, on trouve aussi

$$(8) \qquad \Delta' = d^{\frac{q\mathrm{M}}{m}}.$$

III. *En appelant* $'\Theta_{\mathrm{Q}}$ *un déterminant mineur quelconque d'ordre* Q *de l'abaque d'agrégation* (5) *et* $\Theta'_{\mathrm{M}-\mathrm{Q}}$ *le mineur de l'abaque des* M *premières colonnes de* (4) *qui est semblable à son complémentaire, on a la relation*

$$(9) \qquad '\Theta_{\mathrm{Q}} = d^{q\mathrm{Q}-\frac{q\mathrm{M}}{m}}\,\Theta'_{\mathrm{M}-\mathrm{Q}}.$$

[1] On raisonne en s'appuyant sur ce théorème d'Algèbre générale, bien connu dans le cas d'une seule variable indépendante : *Un polynôme premier qui divise un produit de plusieurs polynômes divise nécessairement l'un d'eux.* Il est inutile, sans doute, d'en fournir ici la démonstration.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que $'\Theta_Q$ est relatif aux Q dernières lignes de (5) et à ses Q dernières colonnes notées par les lettres $'\vartheta, \ldots, '\tau$, et nous considérerons l'abaque

$$(10) \quad \left\| \begin{array}{cccccccc} \delta'_1 & \ldots & \vartheta'_1 & \ldots & \ldots & \tau'_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta'_{M-Q} & \ldots & \vartheta'_{M-Q} & \ldots & \ldots & \tau'_{M-Q} & \ldots \\ 0 & \ldots & d^q & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & d^q & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & d^q & \ldots \end{array} \right\|$$

formé avec les M − Q premières lignes de $(A)_q$ ou (4) et les Q dernières de $(B)_q$ ou (3).

Ce nouvel abaque est évidemment agrégé à $(A)_q$ avec l'abaque d'agrégation ici carré

$$(11) \quad \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\vartheta_1 & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_1, \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\vartheta_2 & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & d^{q-1}\,'\vartheta_{M-Q} & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_{M-Q}, \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\vartheta_{M-Q+1} & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_{M-Q+1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\vartheta_M & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_M. \end{array} \right\|$$

Cela posé, le déterminant des M premières colonnes de (10) et celui de (11) sont évidemment égaux à $d^{qQ}\Theta'_{M-Q}$ et $'\Theta_Q$ respectivement; en écrivant donc que le premier est égal au produit du second par Δ', déterminant des M premières colonnes de (4), on trouve la relation

$$d^{qQ}\Theta'_{M-Q} = \Delta'\,'\Theta_Q,$$

qui, simplifiée après la substitution à Δ' du second membre de l'identité (8), donne bien la formule (9) qu'il fallait établir.

La formule (9) se change en (6) si l'on y fait Q = M, en convenant de considérer comme égal à 1 tout déterminant d'ordre = 0.

IV. L'abaque d'agrégation $(K)_q$ étant actuellement connu, les relations mentionnées au n° **88** se formeront sans difficulté. Il serait sans intérêt de les développer ici.

V. Nous noterons toutefois les suivantes, qui nous seront bientôt utiles. Considérons, dans $(B)_q$, deux groupes chacun de M colonnes et composés : le premier des M premières, dont les mineurs dépendent seulement des éléments des colonnes saillantes de (2), le second d'une colonne dont les mineurs dépendent des éléments des colonnes de rangs $m+1, 2, 3, \ldots, q-1, q$ de (B) et des $M-1$ colonnes restant dans le premier groupe ci-dessus défini, quand on en ôte celle dont les mineurs ont été formés avec les éléments des q premières colonnes de (B). Les déterminants de ces deux groupes de colonnes (écrites pour chacun dans un ordre convenable) se réduisent évidemment à d^{qM} et $d^{qM-1}d_{ah}$ respectivement. Mais, à cause de l'équivalence des abaques $(B)_q$, $(A)_q$, ils sont proportionnels (**74**) aux déterminants semblables de ce dernier, savoir Δ' et un autre que nous représenterons par Δ_{ah}. En d'autres termes, on a la proportion

$$\frac{d^{qM}}{\Delta'} = \frac{d^{qM-1}d_{ah}}{\Delta_{ah}},$$

qui, divisée par d^{qM-1}, devient simplement

(12) $$\frac{d}{\Delta'} = \frac{d_{ah}}{\Delta_{ah}}.$$

En raisonnant de même, on trouvera sans peine d'autres relations analogues, en vertu desquelles *le déterminant d de l'abaque (2) et tous ses contigus* (**58**) *sont proportionnels à des déterminants de $(A)_q$ dont la loi de formation est évidente.*

90. Les formules (6), (9) sont très employées dans le cas particulier de $q=1$. Des deux abaques (4), (5), le premier coïncide avec le proposé (1); le second, avec celui des mineurs complémentaires des éléments des m premières colonnes, dans l'abaque carré qu'elles forment : il se nomme l'abaque à éléments *réciproques* de cet abaque carré.

Comme $M = m$, ces formules deviennent respectivement

$$(13) \qquad '\Delta = d^{m-1},$$

$$(14) \qquad '\Theta_Q = d^{Q-1}\Theta'_{m-Q}.$$

Pour $Q = m - 1$, la dernière donne cette proposition, qui est très souvent utile :

Les mineurs d'ordre $m - 1$ de l'abaque à éléments réciproques d'un abaque carré donné de hauteur m reproduisent les éléments de celui-ci multipliés par la puissance $m - 2$ de son déterminant.

91. *En appelant d le déterminant de m colonnes $a, b, c, \ldots, g$ de l'abaque (1) et (h) un second déterminant contenant une colonne h qui n'appartient pas au premier, on obtient une somme nulle en ajoutant à leur produit $d(h)$, après les avoir multipliées par -1, les m expressions $d_{ah}(a)$, $d_{bh}(b)$, ..., $d_{gh}(g)$ qui s'en déduisent par les échanges successifs de la colonne h de (h) avec les colonnes $a, b, c, \ldots, g$ de d. Plus brièvement, on a*

$$(15) \qquad d(h) - d_{ah}(a) - d_{bh}(b) - d_{ch}(c) - \ldots - d_{gh}(g) = 0.$$

Effectivement (**87**) la ligne des n déterminants

$$(a), (b), (c), \ldots, (g), (h), \ldots, (j),$$

adjointe à l'abaque (2), donne un abaque vanescent de $m+1$ lignes. Cela posé, on obtient immédiatement la relation (15) en développant le déterminant des $m+1$ premières colonnes de ce nouvel abaque, l'égalant à zéro et divisant le résultat par d^{m-1}.

92. Dans les questions impliquant la considération d'un système de formes linéaires, les coefficients de ces formes n'entrent généralement dans les formules que par l'intermédiaire des déterminants du système. Ces derniers y figurent d'une manière homogène, en jouant exactement le même rôle que les coefficients d'une simple forme dans les cas où il s'en présente une seule. Si l'on modifie arbitrairement les formes du système sans qu'il cesse de rester équivalent à lui-même, ils varient

tous dans le même rapport (74), etc.; bref, on peut les considérer, eux ou des quantités proportionnelles, comme les *coefficients* du système conçu en bloc et, indépendamment de l'individualité spéciale et variable à l'infini, de chacune des formes qui peuvent y entrer, la nature de ce système, caractérisée par sa propriété d'être équivalent ou non équivalent à tels ou tels autres donnés de mêmes dimensions, restant toujours invariable.

Ces considérations nous conduisent à chercher s'il existe un système de formes ayant des déterminams proportionnels à des quantités données et à le construire le cas échéant. La solution de cette question est fournie par le théorème suivant :

Pour qu'il existe quelque système de m formes linéaires à n ($> m$) *variables, dont les déterminants soient proportionnels à des quantités données, il est nécessaire et suffisant que ces quantités satisfassent à la relation* (15) *et à toutes celles du même genre.*

La nécessité de la condition posée résulte immédiatement de ce que les relations en question sont homogènes (du deuxième degré) par rapport aux déterminants qui y figurent, par suite, qu'elles ont lieu aussi entre des quantités proportionnelles à ces déterminants.

Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons d'abord que les quantités données ne soient pas toutes nulles; représentons-les en ajoutant un accent aux notations mêmes des déterminants qui doivent leur être proportionnels. Avec une de ces quantités d', différente de zéro, et celles auxquelles doivent être proportionnels les déterminants contigus à d, formons l'abaque de m lignes et n colonnes

$$(16)\qquad \left|\begin{matrix} d' & 0 & 0 & \ldots & 0 & d'_{ah} & \ldots & d'_{aj}, \\ 0 & d' & 0 & \ldots & 0 & d'_{bh} & \ldots & d'_{bj}, \\ 0 & 0 & d' & \ldots & 0 & d'_{ch} & \ldots & d'_{cj}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d' & d'_{gh} & \ldots & d'_{gj}, \end{matrix}\right.$$

et prouvons qu'il appartient à un système qui satisfait aux conditions voulues.

D'abord, en développant le déterminant d des m premières colonnes

et tous ses contigus $d_{ah}, \dots, d_{gj}$, on constate immédiatement l'existence des proportions

$$(17)\qquad \frac{d}{d'} = \frac{d_{ah}}{d'_{ah}} = \dots = \frac{d_{gj}}{d'_{gj}} = d'^{m-1}.$$

Ensuite, en appelant (h) un déterminant du même abaque contenant $m-2$ colonnes de d, et deux autres colonnes ne lui appartenant pas, dont la $(m+1)^{\text{ième}}$ pour fixer les idées, la relation (15) donne

$$d\,(h) = d_{ah}(a) + d_{bh}(b) + \dots + d_{gh}(g),$$

et (a), (b), ..., (g) qui ont chacun en commun avec d une colonne de plus que (h) sont maintenant contigus à ce déterminant comme $d_{ah}, \dots, d_{gh}$. D'autre part, on a, par hypothèse,

$$d'(h)' = d'_{ah}(a)' + d'_{bh}(b)' + \dots + d'_{gh}(g)'.$$

Ces deux relations divisées membre à membre donnent

$$(18)\qquad \frac{d}{d'}\,\frac{(h)}{(h)'} = \frac{d_{ah}(a) + \dots + d_{gh}(g)}{d'_{ah}(a)' + \dots + d'_{gh}(g)'} = (d'^{m-1})^2.$$

Effectivement, les déterminants qui entrent dans le numérateur du second membre étant tous contigus à d, les proportions (17) donnent

$$\frac{d_{ah}}{d'_{ah}} = \frac{(a)}{(a)'} = \dots = \frac{d_{gh}}{d'_{gh}} = \frac{(g)}{(g)'} = d'^{m-1};$$

d'où

$$\frac{d_{ah}(a)}{d'_{ah}(a)'} = \dots = \frac{d_{gh}(g)}{d'_{gh}(g)'} = (d'^{m-1})^2.$$

En divisant les deux membres de (18) par $\frac{d}{d'}$ qui est égal à d'^{m-1}, il vient finalement

$$\frac{(h)}{(h)'} = d'^{m-1}.$$

Ainsi les déterminants (h), qui ont seulement $m-2$ colonnes com-

munes avec d, sont bien aussi, comme ce déterminant et ses contigus, proportionnels aux quantités correspondantes dans la suite donnée.

En s'appuyant sur cette extension de la proportionnalité voulue, aux déterminants dont il s'agit, on l'étendra au moyen du même raisonnement à ceux qui ont seulement $m-3$ colonnes communes avec d, puis de là à ceux qui n'en ont que $m-4$, $m-5$, ..., puis finalement à tous les déterminants de l'abaque (16).

En induisant (16) par tous les abaques carrés imaginables de hauteur m et de déterminant non $= 0$, on obtiendra évidemment (**71**, **74**) les abaques de tous les systèmes irréductibles qui répondent à la question.

En prenant enfin un système réductible quelconque de m formes, ses déterminants seront nuls, partant proportionnels à la rigueur aux quantités données, et l'on aura le reste des systèmes qui peuvent être considérés comme satisfaisant aux conditions du problème.

Si les quantités données sont toutes nulles, ce qui n'est pas incompatible avec les relations (15), le problème n'a pas d'autre solution qu'un système réductible quelconque de m formes.

93. Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier de celui-ci :

Étant donnés les éléments d'un abaque de $M = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$ *lignes et de* $N = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2\ldots q}$ *colonnes* $(n \geq m \geq q)$, *trouver un système de m formes linéaires à n variables, dont l'abaque des déterminants mineurs d'ordre q soit équivalent au proposé (par les lignes).*

Puisque l'abaque des mineurs d'ordre q du système cherché doit être équivalent à celui des quantités données, les déterminants majeurs de ces deux abaques doivent être proportionnels (**74**). Les relations (12) subsisteront donc encore si, à leurs dénominateurs qui sont inconnus, on substitue les déterminants majeurs correspondants de l'abaque donné qui sont connus. Transformées de cette manière, elles fournissent évidemment des quantités proportionnelles à un déterminant du système cherché et à tous ses contigus, quantités à l'aide desquelles on formera les coefficients de ce système en opérant comme ci-dessus (**92**).

Théoriquement, ce problème a autant d'importance que le précédent; car, à un certain point de vue, les éléments de l'abaque des mineurs d'ordre quelconque q d'un système de formes linéaires, comme ceux de l'abaque unilinéaire des majeurs, comme ceux des mineurs d'ordre 1, c'est-à-dire comme les coefficients eux-mêmes, peuvent être considérés comme constituant un ensemble d'autres coefficients spéciaux du système. Ce point de vue s'impose de lui-même quand on a à concevoir les formes par groupes de q. Mais son utilité pratique qui est encore nulle me dispense d'insister davantage, et notamment de formuler les conditions de possibilité.

Actions mécaniques produites par les aimants et par le magnétisme terrestre

[SUITE ([1])];

PAR M. PAUL LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques.

§ X. — CALCUL DE QUELQUES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES.

Notations. — Soient, comme précédemment (n° **147**) :

175. K un élément magnétique et k l'élément équivalent de solénoïde, d'intensité I et d'aire λ;

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ leurs axes, qui coïncident par définition;

K et $\mathrm{k} = \mathrm{I}\lambda$ (25) leurs moments, égaux par définition;

O leur centre commun de gravité, et x, y, z ses coordonnées rectangulaires;

175'. M' un système extérieur, rigide et invariable dans sa constitution physique, solidaire avec trois axes à gauche rectangulaires, auxquels sont rapportées les coordonnées fixes x, y, z, agissant successivement sur K et sur k, pouvant comprendre des courants fermés ε', à une ou plusieurs dimensions, des aimants A' et le magnétisme terrestre;

$\mathfrak{M}'$ le même système, quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie;

$\mathrm{D}_{M'}$ (n° **40**) la force directrice de M' au point O;

$\mathrm{A}_{M'}$, $\mathrm{B}_{M'}$, $\mathrm{C}_{M'}$ les composantes de cette force;

$\mathrm{V}_{M'}$ le potentiel de M' au point O.

([1]) Voir même Tome, p. 113.

Cas simples de l'action du système M' sur un aimant extérieur.

174. Le système M' exerce des actions identiques sur un aimant extérieur A, et sur le système équivalent $\mathcal{E}$ d'éléments de solénoïdes.

Il suffit d'établir ce principe, en réduisant A et $\mathcal{E}$ à un seul de leurs éléments K et k (n° **173**), et M' soit à un courant fermé, soit à un aimant, soit au magnétisme terrestre. Or il a été démontré dans ces trois cas (n^{os} **150**, **159** et **172**).

175. Il en résulte que l'on peut remplacer k, k et $\mathfrak{g}$ (**173**) par K, K et $\mathcal{A}$ dans les formules (124) et suivantes, appliquées au cas (n° **96**) d'un champ de force uniforme.

L'axe $\mathcal{A}_0$ et le moment K_0 d'un aimant A ont été définis (n° **164**) par l'axe $\mathfrak{g}_0$ et le moment k_0 du système équivalent $\mathcal{E}$ d'éléments de solénoïdes, et ceux-ci par les équations (121). En observant que chaque aire d'un de ces courants se réduit à un seul élément λ, ayant pour normale positive $\mathfrak{g}$, la première de ces trois équations devient, en faisant la substitution du n° **173**,

$$(216) \qquad \alpha_0 \mathrm{k}_0 = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \mathrm{I}\lambda \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{g}} = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \mathrm{k} \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{g}} = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \mathrm{K} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{A}},$$

ou, plus explicitement, en décomposant le volume ϖ de l'aimant en éléments $d\varpi$, et étendant le signe Σ à tous les éléments magnétiques, très nombreux par hypothèse, contenus dans $d\varpi$,

$$(217) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \mathrm{k}_0 &= \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \frac{\sum\left(\mathrm{K}\dfrac{\partial x}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi} d\varpi, \\ \beta_0 \mathrm{k}_0 &= \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \frac{\sum\left(\mathrm{K}\dfrac{\partial y}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi} d\varpi, \\ \gamma_0 \mathrm{k}_0 &= \underbrace{\int\int\int}_{\varpi} \frac{\sum\left(\mathrm{K}\dfrac{\partial z}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi} d\varpi. \end{aligned} \right.$$

L'intensité de l'aimantation, au point (x, y, z), a été représentée (198), en grandeur, direction et sens, par une droite Φ, issue de ce point, et ayant pour projections sur les axes

$$(218)\qquad \alpha\Phi = \frac{\sum\left(K\frac{\partial x}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi},\quad \beta\Phi = \frac{\sum\left(K\frac{\partial y}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi},\quad \gamma\Phi = \frac{\sum\left(K\frac{\partial z}{\partial \mathcal{A}}\right)}{d\varpi}.$$

Introduisant dans (217) les notations (218), on définit (n° **164**) l'axe $\mathcal{A}_0$ et le moment K_0 de l'aimant par les trois équations

$$(219)\qquad \alpha_0 K_0 = \iiint_{\varpi} \alpha\Phi\, d\varpi,\quad \beta_0 K_0 = \iiint_{\varpi} \beta\Phi\, d\varpi,\quad \gamma_0 K_0 = \iiint_{\varpi} \gamma\Phi\, d\varpi.$$

Les énergies du système $\mathfrak{S}$ et de l'aimant, dans un champ de force uniforme, ont donc les expressions suivantes, dont la première est la formule (129),

$$(220)\qquad W_{M',\mathfrak{S}} = -k_0 D_0 \cos(D_0, \mathfrak{g}_0),$$

$$(220')\qquad W_{M',A} = -K_0 D_0 \cos(D_0, \mathcal{A}_0),$$

et dans lesquelles D_0 désigne la force directrice du système extérieur agissant M' au point $M(x_0, y_0, z_0)$, lié invariablement à l'aimant, et pris arbitrairement dans le champ uniforme.

On voit, par les équations (124) et (128) et par leurs analogues, que les actions identiques de M' sur $\mathfrak{S}$ et sur A se réduisent à un couple, qui est dans le plan de l'angle $(D_0, \mathfrak{g}_0)$ ou $(D_0, \mathcal{A}_0)$, tend à diminuer cet angle, et a pour moment

$$(221)\qquad -k_0 D_0 \sin(D_0, \mathfrak{g}_0) = -K_0 D_0 \sin(D_0, \mathcal{A}_0).$$

176. Donc, lorsqu'un élément magnétique K, et l'élément équivalent k de solénoïde, sont assujettis uniquement à avoir leurs centres de gravité fixes, et que ceux-ci sont placés successivement en un même point O, sous l'action d'un même système extérieur M' (n° **175**), leurs axes $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{g}$ oscillent l'un et l'autre autour de la force directrice D de M' au point O.

Les formules (220) et (220′) s'appliquent à un élément k de solénoïde et à un élément magnétique K, placés dans un champ de force quelconque. On a (n° **175**)

$$ (222) \qquad \mathrm{W}_{M',k} = \mathrm{k}\,\frac{\partial \mathrm{V}_{M'}}{\partial \mathfrak{x}} = -\,\mathrm{k}\,\mathrm{D}\cos(\mathrm{D}, \mathfrak{x}), $$

$$ (222') \qquad \mathrm{W}_{M',K} = \mathrm{K}\,\frac{\partial \mathrm{V}_{M'}}{\partial \mathfrak{X}} = -\,\mathrm{K}\,\mathrm{D}\cos(\mathrm{D}, \mathfrak{X}). $$

Usage de deux fluides fictifs pour la représentation de toutes les forces observables entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre.

177. Soit s un solénoïde (n° **19**), situé tout entier en dehors de M', ayant pour axe une ligne $\mathrm{L} = np$, dont l'axe $\mathfrak{x}$ fait partie, allant de son *pôle négatif* n à son *pôle positif* p, et composé d'un système d'éléments k de solénoïde, d'axe L, d'intensité I, dont les aires planes λ partagent L en éléments $\delta\mathfrak{x}$ assujettis à la relation

$$ (223) \qquad \frac{\mathrm{I}\lambda}{\delta\mathfrak{x}} = \frac{\mathrm{k}}{\delta\mathfrak{x}} = \text{une constante } \mu \quad (8 \text{ et } 25). $$

Un observateur traversé des pieds à la tête par l'un de ces courants, et regardant l'axe, aura le pôle positif à sa gauche. Soient les mêmes notations accentuées pour un second solénoïde s'.

178. La définition des pôles s'applique à un élément k de solénoïde : les pôles p et n sont le commencement et la fin de son axe $\mathfrak{x}$.

Soient deux fluides fictifs, l'un *positif*, appelé aussi *nord* ou *austral*; l'autre *négatif*, appelé aussi *sud* ou *boréal*, susceptibles d'avoir une ou plusieurs dimensions, ou de n'en avoir aucune, et, dans ce dernier cas, ils seront appelés *molécules fictives*. En plaçant aux pôles (n° **177**) des deux solénoïdes

$$ p, \qquad n, \qquad p', \qquad n', $$

les molécules fictives qu'on appelle aussi *masses des pôles*,

$$ (224) \qquad \overset{+}{\mu} = \frac{\mathrm{I}\lambda}{\delta\mathfrak{x}} = \frac{\mathrm{k}}{\delta\mathfrak{x}}, \quad \overset{-}{\mu} = -\frac{\mathrm{k}}{\delta\mathfrak{x}}, \quad \overset{+}{\mu}{}' = \frac{\mathrm{I}'\lambda'}{\delta\mathfrak{x}'} = \frac{\mathrm{k}'}{\delta\mathfrak{x}'}, \quad \overset{-}{\mu}{}' = -\frac{\mathrm{k}}{\delta\mathfrak{x}}, $$

surmontées ou privées de leurs signes, suivant qu'ils seront ou non déterminés, et appliquant l'équation (45) dans laquelle $f = 1$ (n° 56), au cas où trois des dimensions pp', pn', np', nn' sont infinies; on voit que la partie finie de l'énergie $W_{s',s}$ devient

$$\lim W_{s',s} = W_{\mu',\mu}, \tag{225}$$

en posant

$$W_{\mu',\mu} = W_{\mu,\mu'} = \frac{\mu\mu'}{r}; \tag{226}$$

μ et μ' désignant les masses des deux pôles dont la distance r est finie, et

$$W_{\mu',\mu} = W_{\mu,\mu'} \tag{227}$$

l'énergie du système des deux molécules fictives μ et μ'.

La somme des travaux virtuels élémentaires des actions mutuelles de ces deux *solénoïdes indéfinis*, en continuant de regarder leurs axes comme flexibles et inextensibles, est (63)

$$\lim [d\bar{\omega}(s',s) + d\bar{\omega}(s,s')] = -dW_{\mu',\mu} = \frac{\mu\mu'}{r^2}\,dr. \tag{228}$$

179. Donc l'action mutuelle de deux solénoïdes indéfinis, dont les axes sont flexibles et inextensibles, se réduit, en vertu des liaisons, et outre les forces qu'elles détruisent, à une action et à une réaction, égales et de sens contraires, attractives ou répulsives, entre leurs pôles. On représente cette action mutuelle, en disant que les masses μ et μ' de ces pôles agissent entre elles suivant les lois de Coulomb, c'est-à-dire s'attirent ou se repoussent comme l'exprime la formule algébrique

$$\text{Répulsion}(\mu',\mu) = \text{répulsion}(\mu,\mu') = \frac{\mu\mu'}{r^2}. \tag{229}$$

Les trois autres actions mutuelles des pôles sont infiniment petites, et leurs moments, par rapport à un axe quelconque, sont des infini-

ment petits, dont l'ordre n'est pas moins élevé que l'inverse de leur distance.

La formule (45) devient, en y faisant $\mu = 1$, à l'aide de la notation (226),

$$(230) \qquad W_{s',s} = W_{\overset{+}{\mu}', \overset{+}{\mu}} + W_{\overset{-}{\mu}', \overset{+}{\mu}} + W_{\overset{+}{\mu}', \overset{-}{\mu}} + W_{\overset{-}{\mu}', \overset{-}{\mu}}:$$

et l'on voit, par cette équation (230) ou par l'équation (46), que l'action mutuelle des deux solénoïdes, en supposant leurs axes flexibles et inextensibles, se réduit, en vertu de ces liaisons, et outre les actions qu'elles détruisent, aux quatre forces, dont deux sont attractives et deux répulsives, que représente la formule (229).

La partie bien définie $\varphi_{k'}$ du potentiel d'un élément k' de solénoïde, au point (x, y, z) situé à la distance finie r du commencement (x', y', z') de son axe $\mathfrak{g}$, est donnée par l'équation (52). En y substituant (223), elle devient

$$(231) \qquad \varphi_{k'} = \overset{+}{\mu}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{g}'} \delta \mathfrak{g}',$$

ce qui donne pour la partie bien définie, au même point, du potentiel d'un solénoïde s',

$$(232) \qquad \varphi_{s'} = \overset{-}{\mu}' \int_0^{L'} \frac{\partial' \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{g}'} d\mathfrak{g}' = \frac{\overset{+}{\mu}'}{r_{p'}} + \frac{\overset{-}{\mu}'}{r_{n'}},$$

r, $r_{p'}$ et $r_{n'}$ désignant les distances du point extérieur (x, y, z) au point (x', y', z') de L', et à ses pôles

$$p', \qquad n',$$

où sont placées les molécules fictives (224)

$$(233) \qquad \overset{+}{\mu}' = \frac{k'}{\delta \mathfrak{g}'}, \quad \overset{-}{\mu}' = -\frac{k'}{\delta \mathfrak{g}'}.$$

Si l'un des pôles est à l'infini, soient μ' la masse de l'autre et r sa distance au point (x, y, z). On appelle *potentiel de la molécule fictive* μ',

au point (x, y, z), qui en est à la distance r, l'expression déduite de (232)

$$(234)\qquad \lim \varphi_{s'} = V_{\mu'} = \frac{\mu'}{r};$$

et (232) devient

$$(232')\qquad \varphi_{s'} = V_{\overset{+}{\mu}} + V_{\overset{-}{\mu}}.$$

Donc la partie bien définie du potentiel d'un solénoïde s' est la somme des molécules fictives (233), placées à ses pôles.

On a aussi, pour un élément k' de solénoïde, en lui appliquant la définition (**178**),

$$(232'')\qquad \varphi_{k'} = V_{\overset{+}{\mu}} + V_{\overset{-}{\mu}}.$$

En effet, en ajoutant

$$V_{\overset{-}{\mu}} = \frac{\overset{-}{\mu}'}{r_n} \quad \text{et} \quad V_{\overset{+}{\mu}'} = \frac{\overset{+}{\mu}'}{r_p} \quad \text{ou} \quad V_{\overset{+}{\mu}'} = \overset{+}{\mu}'\left(\frac{1}{r_n} + \frac{\partial \frac{1}{r_n}}{\partial g'}\,\delta g'\right),$$

on trouve

$$V_{\overset{+}{\mu}} + V_{\overset{-}{\mu}} = \overset{+}{\mu}'\,\frac{\partial \frac{1}{r_n}}{\partial g'}\,\delta g'$$

et, en substituant (231), on obtient (232'').

180. Les pôles d'un élément magnétique K' seront définis les pôles p' et n' (nº **178**) de l'élément équivalent k' de solénoïde (nº **175**).

L'équation (173) $\varphi_{k'} = V_{K'}$ et l'équation (232'') donnent

$$(232''')\qquad V_{K'} = V_{\overset{+}{\mu}'} + V_{\overset{-}{\mu}'}.$$

Donc le potentiel d'un élément magnétique est la somme des potentiels des molécules fictives (233), placées à ses pôles.

181. En vertu de la définition **146** et des formules (232''), (232'''), le système fictif équivalent soit à un élément de solénoïde, soit à un

élément magnétique, sera défini celui des deux molécules fictives (233), placées à ses pôles.

182. Généralisant (234) et (226), on appelle *potentiel*, au point (x, y, z), d'un système $\mathfrak{M}'$ de molécules fictives, dont les masses μ'_1, $\mu'_2, \ldots$ sont à des distances $r_1, r_2, \ldots$ du point (x, y, z), la somme algébrique des potentiels de ces masses au même point

$$(234) \qquad W_{\mathfrak{M}'} = \sum_n V_{\mu'_n} = \sum_n \frac{\mu'_n}{r_n};$$

énergie des actions mutuelles de deux systèmes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ *de molécules fictives* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *et* $\mu'_1, \mu'_2, \ldots$ la somme des énergies de toutes les combinaisons d'une molécule de $\mathfrak{M}$ avec une molécule de $\mathfrak{M}'$,

$$(235) \qquad W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}} = W_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'} = \sum_n \sum_{n'} W_{\mu'_{n'}, \mu_n} = \sum_n \mu_n \sum_{n'} \frac{\mu'_{n'}}{r_{n,n'}}$$

et, en substituant (234),

$$(235') \qquad W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}} = \sum_n \mu_n V_{\mathfrak{M}'}(x_n, y_n, z_n),$$

x_n, y_n, z_n désignant les coordonnées de μ_n.

Le travail des actions mutuelles des deux systèmes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, après des déplacements quelconques, est égal et de signe contraire à la variation de l'énergie (235)

$$(236) \qquad \mathfrak{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') = -\Delta W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}}.$$

En effet, ce théorème se vérifie immédiatement, quand chaque système se réduit à une molécule, et se généralise, en vertu de la définition (235), par une double sommation.

183. L'énergie (235) représente la somme des travaux des actions mutuelles des deux systèmes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ quand toutes les distances $r_{n,n'}$ deviennent infinies.

En effet, la valeur finale du dernier membre de (235) étant nulle, le second membre de (236) se réduit à la valeur initiale de $W_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}}$.

184. Si toutes les masses de $\mathfrak{M}$ sont égales et de signes contraires deux à deux, l'énergie $W_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}}$ est aussi la somme des travaux des actions mutuelles de toutes les combinaisons deux à deux d'une molécule de $\mathfrak{M}$ avec une molécule de $\mathfrak{M}$, lorsque $\overset{+}{\mu}_1$ vient coïncider avec μ_1, $\overset{+}{\mu}_2$, avec μ_2, et ainsi de suite. Dans ce cas, le seul qui se présente dans la théorie du magnétisme, $W_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}}$ peut être appelé *le travail extérieur de la neutralisation de* $\mathfrak{M}$.

La démonstration s'aperçoit immédiatement.

Action d'un solénoïde S' sur un élément de courant extérieur I ds qui va de l'origine au point x + dx, y + dy, z + dz.

185. Cette action se réduit (n° **25**) à une force unique, appliquée à l'origine; et en substituant (232) dans (50), on trouve

$$
(237)\quad \begin{cases}
(\mathrm{S}, \mathrm{I}\,ds)_x = (\xi_{\mu} + \xi_{\mu})\,\mathrm{I}\,ds,\\
(\mathrm{S}, \mathrm{I}\,ds)_y = (\eta_{\mu} + \eta_{\mu})\,\mathrm{I}\,ds,\\
(\mathrm{S}, \mathrm{I}\,ds)_z = (\zeta_{\mu} + \zeta_{\mu})\,\mathrm{I}\,ds,
\end{cases}
$$

en posant

$$
(238)\quad \begin{cases}
\xi_{\mu}\,ds = \left(dz\,\dfrac{d}{dy} - dy\,\dfrac{d}{dz}\right)\mathrm{V}_{\mu},\\
\eta_{\mu}\,ds = \left(dx\,\dfrac{d}{dz} - dz\,\dfrac{d}{dx}\right)\mathrm{V}_{\mu},\\
\zeta_{\mu}\,ds = \left(dy\,\dfrac{d}{dx} - dx\,\dfrac{d}{dy}\right)\mathrm{V}_{\mu}.
\end{cases}
$$

Or l'équation $\mathrm{V}_{\mu} = \dfrac{\mu}{r}$, dans laquelle

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{\ldots z \ldots}\ [illegible]\ \text{o},$$

donne

$$(239)\qquad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial x} = \mu' \frac{x'}{r^3}, \quad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial y} = \mu' \frac{y'}{r^3}, \quad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial z} = \mu' \frac{z'}{r^3};$$

d'où

$$(240)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_{\underset{\mu'}{+}}\, ds &= \mu' \frac{y'_p\, dz - z'_p\, dy}{r_p^3}, \\ \eta_{\underset{\mu'}{+}}\, ds &= \mu' \frac{z'_p\, dx - x'_p\, dz}{r_p^3}, \\ \zeta_{\underset{\mu'}{+}}\, ds &= \mu' \frac{x'_p\, dy - y'_p\, dx}{r_p^3}. \end{aligned} \right.$$

$$(240')\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_{\underset{\mu'}{-}}\, ds &= \mu' \frac{y'_n\, dz - z'_n\, dy}{r_n^3}, \\ \eta_{\underset{\mu'}{-}}\, ds &= \mu' \frac{z'_n\, dx - x'_n\, dz}{r_n^3}, \\ \zeta_{\underset{\mu'}{-}}\, ds &= \mu' \frac{x'_n\, dy - y'_n\, dx}{r_n^3}. \end{aligned} \right.$$

186. L'action du solénoïde $\mathcal{S}$ sur $\mathrm{I}\,ds$ est donc la résultante des deux forces appliquées à l'origine

$$(241)\qquad f_{\underset{\mu'}{+}}\mathrm{I}\,ds \quad \text{et} \quad f_{\underset{\mu'}{-}}\mathrm{I}\,ds,$$

ayant pour composantes (240) et (240')

$$(242)\qquad \xi_{\underset{\mu'}{+}}\mathrm{I}\,ds, \quad \eta_{\underset{\mu'}{+}}\mathrm{I}\,ds, \quad \zeta_{\underset{\mu'}{+}}\mathrm{I}\,ds \quad \text{et} \quad \xi_{\underset{\mu'}{-}}\mathrm{I}\,ds, \quad \eta_{\underset{\mu'}{-}}\mathrm{I}\,ds, \quad \zeta_{\underset{\mu'}{-}}\mathrm{I}\,ds.$$

En dirigeant les axes de manière que l'on ait (*fig.* 14)

$dx = dy = 0$, $dz = ds$, $x'_p = 0$, $y'_p > 0$, d'où $y'_p = r_p \sin(r_p, ds)$,

les équations (240) donnent

$$(243)\qquad \xi_{\underset{\mu'}{+}} = \mu' \frac{y'_p}{r_p^3}, \quad \eta_{\underset{\mu'}{+}} = 0, \quad \zeta_{\underset{\mu'}{+}} = 0;$$

d'où

(244) $$\xi_{\overset{+}{\mu}} > 0, \quad f_{\overset{+}{\mu}} = \xi_{\overset{+}{\mu}} = \frac{\overset{+}{\mu}}{r_p^2} \sin r_p, ds .$$

Fig. 14.

Ainsi la force $f_{\overset{+}{\mu}}$ est dirigée suivant l'axe des x positifs. Donc :

187. La force $f_{\overset{+}{\mu}}$ est perpendiculaire au plan passant par r_p et par ds : elle se trouve à la droite d'un observateur traversé des pieds à la tête par le courant, et regardant le pôle positif p'.

Si le courant du solénoïde est interverti, ses pôles et son potentiel (232) changent de signes, ainsi que les composantes (238). Donc l'énoncé **187** donne lieu au suivant.

187'. La force $f_{\bar{\mu}}$ est perpendiculaire au plan passant par $r_{n'}$ et par ds; elle se trouve à la gauche d'un observateur traversé des pieds à la tête par le courant, et regardant le pôle négatif n'. Elle a pour expression

(244') $$f_{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\mu}}{r_n^2} \sin r_{n'}, ds .$$

Si l'un des pôles du solénoïde s' est à l'infini, son potentiel se réduit (234) à celui de l'autre pôle μ', et son action sur $I\,ds$ à l'une des deux forces (241). L'action fictive de μ', exprimée par l'un des groupes de formules (240), (240'), représente donc cette action

réelle. Cette convention permet d'écrire

$$(240'')\qquad \left\{\begin{aligned} (\mu, \mathrm{I}\,ds)_x &= \mathrm{I}\mu\,\frac{y'\,dz - z'\,dy}{r^3},\\ (\mu, \mathrm{I}\,ds)_y &= \mathrm{I}\mu\,\frac{z'\,dx - x'\,dz}{r^3},\\ (\mu, \mathrm{I}\,ds)_z &= \mathrm{I}\mu\,\frac{x'\,dy - y'\,dx}{r^3},\end{aligned}\right.$$

et de dire que l'action de μ sur $\mathrm{I}\,ds$ satisfait, suivant le signe de μ, à l'un des énoncés **187, 187**.

188. Si les fluides fictifs existaient, il faudrait les appeler, suivant l'usage, *fluides magnétiques*, et l'action réelle de la *molécule magnétique m* sur $\mathrm{I}\,ds$ se réduirait nécessairement à celle que donne (240″) ou (50) :

$$(240''')\qquad \left\{\begin{aligned} (m', \mathrm{I}\,ds)_x &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial V_{m'}}{\partial y}\,dz - \frac{\partial V_{m'}}{\partial z}\,dy\right),\\ (m', \mathrm{I}\,ds)_y &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial V_{m'}}{\partial z}\,dx - \frac{\partial V_{m'}}{\partial x}\,dz\right),\\ (m', \mathrm{I}\,ds)_z &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial V_{m'}}{\partial x}\,dy - \frac{\partial V_{m'}}{\partial y}\,dx\right),\end{aligned}\right.$$

en posant (234)

$$(245)\qquad V_{m'} = \frac{m'}{r}.$$

En effet, une ligne quelconque L, qui va de m' à l'infini, étant partagée en éléments égaux $\partial\mathfrak{L}$, on obtiendrait un *filet magnétique indéfini*, en plaçant les deux molécules magnétiques $-m'$ et $+m'$ au commencement et à la fin de chaque élément, et un solénoïde indéfini équivalent, en remplaçant chaque *couple magnétique*, ainsi construit sur un élément $\partial\mathfrak{L}$, par l'élément de solénoïde équivalent (nº **181**). Or l'action du solénoïde sur $\mathrm{I}\,ds$ se réduirait à l'action fictive de son pôle μ, représentée par les équations (240″). Tout revient donc à démontrer que l'action identique du filet magnétique se réduirait à celle

de m. Or cela résulte de ce que l'action sur $I\,ds$ des deux molécules magnétiques $+m$ et $-m$ superposées en un point de division, équivalente (n° **181**) à celle d'un élément de solénoïde dont le moment est nul, le serait aussi, et de ce que l'action du pôle situé à l'infini serait infiniment petite.

Action du système M (n° 173) sur un solénoïde extérieur s, dont l'axe L est flexible et inextensible.

189. Cette action se réduit, en vertu des liaisons, et outre les forces qu'elles détruisent, à deux forces $(M, \dot{\mu})$, (M, μ), appliquées aux pôles de s, et proportionnelles à leurs masses $\dot{\mu}$, μ. Pour $\dot{\mu} = 1$, la première est la force directrice D_p de M au pôle positif p (n° **177**), et la seconde est égale et opposée à la force directrice D_n de M au pôle négatif n.

En effet, en substituant (224) $k = \dot{\mu}\,\delta\zeta$ dans (26), on a

$$(246) \qquad W_{M,k} = \dot{\mu}\frac{\partial V_M}{\partial \zeta}\delta\zeta,$$

d'où résulte, pour l'énergie de l'action de M sur s,

$$(247) \qquad W_{M,s} = \overset{+}{\mu}\int_0^L \frac{\partial V_M}{\partial \zeta}\,d\zeta = \overset{+}{\mu}(V_p - V_n),$$

V_p et V_n désignant les valeurs du potentiel de M aux pôles p et n, liées entre elles, en cas d'ambiguïté, par la condition que l'une se déduise de l'autre, quand on suit la variation de V sans discontinuité en parcourant l'axe L; et pour le travail virtuel élémentaire de cette action

$$(248) \qquad \delta\tau = \delta W_{M,s} = \mu(\delta V_n - \delta V_p).$$

Mais A_p, B_p, C_p étant (n° **40**) les composantes de D_p, les équations (23) donnent A_p pour $-\frac{\partial V_p}{\partial x_p}$; et, pour δV_p, $\frac{\partial V_p}{\partial x_p}\delta x_p \ldots$.

ou $A_p \partial x_p + \ldots$, ou $\partial \tau D_p$; et (248) devient

$$(248') \qquad \partial \tau = \overset{+}{\mu} (\partial \tau D_p - \partial \tau D_n).$$

Donc l'action de M' sur s se réduit aux deux forces

$$(248'') \qquad \overset{+}{\mu} D_p, \qquad \mu D_n,$$

appliquées aux pôles

$$p, \qquad n,$$

dans le sens D_p et en sens contraire de D_n.

ce qui démontre l'énoncé **189**.

Définition de la partie bien définie $\varphi_{\mathfrak{M}'}$ du potentiel du système $\mathfrak{M}'$ (n° **166**) *en un point extérieur* (x, y, z).

190. La forme la plus générale du potentiel du système $\mathfrak{M}'$, au point (x, y, z), est (83)

$$V_{\mathfrak{M}'} = \Sigma V_{\mathfrak{S}'} + \Sigma V_{\mathfrak{l}'} + \text{une constante arbitraire}$$

ou

$$V_{\mathfrak{M}'} = \Sigma \varphi_{\mathfrak{S}'} + \Sigma V_{\mathfrak{l}'} + \text{une autre constante arbitraire.}$$

En donnant à cette dernière constante la valeur zero, on a la fonction

$$(249) \qquad \varphi_{\mathfrak{M}'} = \Sigma \varphi_{\mathfrak{S}'} + \Sigma V_{\mathfrak{l}'},$$

qui sera, par définition, *la partie bien définie du potentiel du système $\mathfrak{M}'$*.

190'. On peut donner pour seconde définition de $\varphi_{\mathfrak{M}'}$ *le potentiel du système de molécules fictives $\mathfrak{M}'_0$ équivalent à $\mathfrak{M}'$*, c'est-à-dire de la distribution des fluides fictifs obtenue en décomposant chaque courant fermé en éléments de solénoïdes, et chaque aimant en éléments magnétiques, remplaçant chaque élément magnétique par l'élément équivalent de solénoïde, puis tous ces éléments de solénoïdes, de l'une et de l'autre catégorie, par autant de couples de molécules fictives, ayant les masses et les positions déterminées par les formules (224), et l'équa-

tion (249) équivaut à la suivante :

(250) $$\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'} = \mathrm{V}_{\mathfrak{M}'_0}.$$

Définition de l'énergie des actions mutuelles entre un système $\mathfrak{M}'$ de courants fermés permanents et d'aimants dont le magnétisme est rigide, et une molécule fictive de masse μ, placée au point (x, y, z).

191. En supposant que tous les points de l'axe L du solénoïde s, auquel s'applique la formule (247), soient extérieurs au système $\mathfrak{M}'$, et aux nappes de surface fermant les ouvertures annulaires que peut présenter ce système, cette formule peut s'écrire

(251) $$\mathrm{W}_{\mathfrak{M}',s} = \overset{+}{\mu}[\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(p) - \mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n)].$$

Si le pôle n est seul à l'infini, $\mathrm{V}_{\mathfrak{M}'_0}(n)$ étant infiniment petit, $\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n)$ l'est aussi (250), et (251) devient

$$\lim \mathrm{W}_{\mathfrak{M}',s} = \overset{+}{\mu}\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(p).$$

Pareillement, si p est seul à l'infini,

$$\lim \mathrm{W}_{\mathfrak{M}',s} = \overset{-}{\mu}\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n).$$

On comprend ces deux cas dans une seule formule, dans laquelle on suppose que le pôle μ est seul à distance finie, au point (x, y, z)

(252) $$\lim \mathrm{W}_{\mathfrak{M}',s} = \mu\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(x, y, z).$$

C'est pourquoi on est convenu d'appeler *énergie des actions mutuelles entre le système $\mathfrak{M}'$ et la molécule fictive μ* la fonction

(253) $$\mathrm{W}_{\mathfrak{M}',\mu} = \mu\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'};$$

et alors (252) devient

(252') $$\lim \mathrm{W}_{\mathfrak{M}',s} = \mathrm{W}_{\mathfrak{M}',\mu}.$$

Quelques exemples de substitution d'un système de molécules fictives aux courants fermés et aux aimants.

192. L'équation (247) devient, en y introduisant la notation (253),

$$(254)\qquad W_{\mathfrak{M}',s} = W_{\mathfrak{M}',\overset{+}{\mu}} + W_{\mathfrak{M}',\overset{-}{\mu}};$$

mais il faut supposer, dans (252′) et (254), que l'axe L ne rencontre ni $\mathfrak{M}'$ ni les nappes fermant les ouvertures annulaires des courants.

La formule (254) s'applique à un élément de solénoïde

$$(255)\qquad W_{\mathfrak{M}',k} = W_{\mathfrak{M}',\overset{+}{\mu}} + W_{\mathfrak{M}',\overset{-}{\mu}}.$$

En effet, en ajoutant

$$W_{\mathfrak{M}',\overset{-}{\mu}} = \overset{-}{\mu}\,\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n)$$

et

$$W_{\mathfrak{M}',\overset{+}{\mu}} = \overset{+}{\mu}\,\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(p) = \overset{+}{\mu}\left[\mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n) + \frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n)}{\partial \varrho}\,\delta\varrho\right],$$

on trouve

$$W_{\mathfrak{M}',\overset{+}{\mu}} + W_{\mathfrak{M}',\overset{-}{\mu}} = \overset{+}{\mu}\,\frac{\partial \mathcal{V}_{\mathfrak{M}'}(n)}{\partial \varrho}\,\delta\varrho,$$

et, en substituant (246), on obtient (255).

193. L'énergie (246) de l'action de M' sur k exprime le travail, relatif à trois axes fixés à M', de l'action de M' sur un pôle de k, parcourant $\delta\varrho$.

Cela résulte immédiatement de l'équation (255) et du n° **184**, si le magnétisme terrestre ne fait pas partie de M'. S'il en fait partie, l'expression (224) $k = \overset{+}{\mu}\,\delta\varrho$, substituée dans (222), donne

$$W_{M',k} = -\overset{+}{\mu}\,D\cos(D,\varrho)\,\delta\varrho,$$

et, puisque M' produit (248″) sur $\overset{+}{\mu}$ la force $F = \overset{+}{\mu}D$,

$$(256)\qquad W_{M',k} = -F\cos(F,\varrho)\,\delta\varrho, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

194. L'énergie (247) représente le travail, relatif à trois axes fixés à

M', de l'action F de M' sur un pôle de solénoïde s, qui en parcourrait l'axe ζ dans toute sa longueur.

Car, en intégrant (256) de $\zeta = 0$ à $\zeta = L$, on trouve

$$(257) \qquad W_{\mathfrak{M}',s} = -\int_0^L F \cos(F, \zeta)\, d\zeta.$$

195. Les actions du système fixe $\mathfrak{M}'$ (n° **175**) et du système équivalent $\mathfrak{M}'_0$ (n° **190**) sur un élément I ds de courant linéaire, fixe et permanent, sont identiques.

Car on a vu (240″) qu'elles se calculent par les mêmes formules (50), dans lesquelles il faut introduire successivement les deux potentiels (250).

196. Soient k_0 et k'_0 les systèmes fictifs qui équivalent à deux éléments k, k' de solénoïdes, et se composent chacun de deux molécules fictives $\overset{+}{\mu}$ et $\overset{-}{\mu}$, $\overset{+}{\mu}'$ et $\overset{-}{\mu}'$. Les quatre actions produites par k' sur k, par k'_0 sur k, par k' sur k_0 et par k'_0 sur k_0, sont identiques.

197. Les actions mutuelles entre k'_0 et k sont de nature à se faire équilibre sur un système rigide.

Les démonstrations de ces deux énoncés se déduisent facilement des formules qui précèdent.

198. Toutes les actions observables qu'un aimant A et le système équivalent $\mathfrak{S}$, d'éléments de solénoïdes éprouvent et produisent sont identiques.

Cela été démontré (n° **174**) pour les actions que les deux systèmes reçoivent, et cela résulte, pour celles qu'ils produisent, de ce qu'elles se calculent par leurs potentiels ΣV_A et $\Sigma \mathfrak{V}_A$, dont l'égalité résulte de la relation $V_A = \mathfrak{V}_A$ (173).

Appliquant ce résultat au cas particulier d'un élément magnétique; remplaçant, dans l'énoncé **196**, les éléments k et k' de solénoïdes par les éléments magnétiques équivalents K et K'; appelant K_0 et K'_0 les systèmes fictifs équivalents à ces éléments magnétiques, et étendant la propriété **197** aux éléments magnétiques, on obtient le principe suivant :

199. Toutes les actions mutuelles entre K' et K, entre K'_0 et K, entre K' et K_0, enfin entre K'_0 et K_0, sont identiques, et susceptibles de se faire équilibre deux à deux sur un système rigide.

Substitution, faite par Ampère, d'un feuillet magnétique à un courant fermé $\mathfrak{S}$, d'intensité constante I *et de longueur* S.

200. Soit Λ_n une aire assujettie uniquement à la condition que S en constitue le périmètre tout entier. En élevant, en chaque point de cette aire, une normale positive infiniment petite $np = \delta\mathfrak{g}$, de longueur constante, ou variable suivant une loi continue, on obtient une aire Λ_p, lieu des points p. On est convenu qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant, verrait $\delta\mathfrak{g}$ à sa gauche. En fixant sur Λ_n et Λ_p deux couches de fluides fictifs, l'une négative, l'autre positive, de manière que la masse totale, interceptée par tout canal ayant pour génératrices des lignes np, soit nulle, et que la densité de surface, correspondant à une épaisseur $\delta\mathfrak{g}$, ait pour valeur absolue

$$\rho = \frac{1}{\delta\mathfrak{g}}, \tag{258}$$

on obtient une distribution de matière fictive, appelée *feuillet magnétique équivalent au courant* $\mathfrak{S}$, équivalente au courant pour toute action observable, qu'il peut produire ou recevoir, lorsque le feuillet et la ligne S sont rigides.

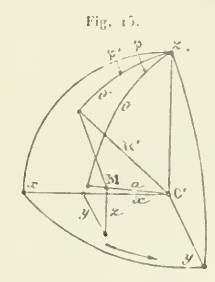
En effet, on peut, sans changer aucune de ces actions, décomposer $\mathfrak{S}$ en éléments de solénoïdes, de dimensions infiniment petites par rapport à $\delta\mathfrak{g}$, substituer à chaque élément k, d'aire $d\Lambda_n$, le système équivalent k_0 (n° **196**), en plaçant $\overset{-}{\mu}$ sur Λ_n et $\overset{+}{\mu}$ sur Λ_p, puis répandre uniformément ces deux masses fictives sur les sections droites $d\Lambda_n$, $d\Lambda_p$ d'un canal orthogonal. On obtient ainsi les deux couches de l'énoncé **200**, satisfaisant, pour chaque élément de solénoïde, à la relation (224) $\overset{+}{\mu} = \frac{\mathrm{k}}{\delta\mathfrak{g}}$, qui devient (258), quand on remplace $\overset{+}{\mu}$ par $\rho\, d\Lambda_p$ et k par $\mathrm{I}\, d\Lambda_p$.

§ XI. — Sur certaines bobines qui jouissent approximativement ou rigoureusement de quelques propriétés des éléments de solénoïdes.

Bobine sphérique.

201. Soit $\mathfrak{S}'$ un système rigide de courants fermés permanents, d'égale intensité I', parcourant dans le même sens xy les intersections d'une sphère de rayon R' avec des plans parallèles, équidistants et infiniment

Fig. 15.



voisins deux à deux. Soient O' son centre, pris pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche (*fig.* 15), et $\delta z'$ la distance de deux plans consécutifs.

Appliquant la définition **98**, on voit que $O'z$ est l'axe

$$\mathrm{L}_0 \tag{259}$$

de cette bobine, et qu'en désignant son volume par u', son *moment* est

$$\mathrm{K}_0 = \frac{1}{\delta z'}\,u' = \frac{4\pi \mathrm{I}'\mathrm{R}'^3}{3\,\delta z'}. \tag{260}$$

A cette bobine sphérique $\mathfrak{S}'$ *correspond* (n° **98**) l'élément de solénoïde

$$k_0, \tag{261}$$

d'intensité infinie, ayant aussi pour centre O', pour moment K_0 (260),

et pour axe ξ'_0 (259). On va voir qu'il *équivaut* (n° **146**) à la bobine sphérique dans tout l'espace extérieur

(262)
$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'} = \mathfrak{V}_{k'_0}.$$

En effet, la bobine sphérique est décomposable, par la construction d'Ampère (n° **55**), en éléments de solénoïdes k', de moments magnétiques k′, et, par suite, l'énergie de l'action qu'elle éprouve, dans le champ de force d'un système extérieur M, pouvant comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, est (26)

$$W_{M, \mathfrak{S}'} = \Sigma k' \frac{\partial V_M}{\partial z},$$

ou en désignant par Λ' la somme des aires de tous les courants circulaires, d'intensité I′, qui constituent la bobine $\mathfrak{S}'$, de volume u',

$$\begin{aligned} W_{M, \mathfrak{S}'} &= \Sigma I' \, d\Lambda' \frac{\partial V_M}{\partial z} = \frac{I'}{\delta z'} \sum \frac{\partial V_M}{\partial z} \, d\Lambda' \, \delta z' \\ &= \frac{I'}{\delta z'} \iiint_{u'} \frac{\partial V_M}{\partial z} \, du' = \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial}{\partial z} \iiint_{u'} V_M \, du' ; \end{aligned}$$

et, comme l'équation $\iiint_{u'} V_M \, du' = u' V_M(O')$ exprime une propriété fondamentale du potentiel, $V_M(O')$ désignant la valeur de V_M au centre O' de la sphère,

$$W_{\mathfrak{M}, \mathfrak{S}'} = \frac{I'}{\delta z'} u' \frac{\partial V_M(O')}{\partial \xi'_0} = k'_0 \frac{\partial V_M(O')}{\partial \xi'_0} ;$$

d'où (26)

(263)
$$W_{M, \mathfrak{S}'} = W_{M, k'_0}.$$

202. Tout système M', extérieur à la bobine sphérique (n° **201**), agit donc sur elle identiquement comme sur l'élément fictif k'_0 (261) de solénoïde.

Si le magnétisme terrestre ne fait pas partie de M, l'équation (263) peut s'écrire

$$W_{\mathfrak{S}',M} = W_{k'_0,M}.$$

Réduisant M à un solénoïde indéfini s, plaçant le pôle négatif à l'infini, et le pôle $\mu = +1$ au point (x, y, z), arbitraire en dehors de la bobine **201**, on peut (252) remplacer, dans la dernière équation, $W_{\mathfrak{S}',M}$ par $\vartheta_{\mathfrak{S}'}(x, y, z)$, et $W_{k'_0,M}$ par $\vartheta_{k'_0}(x, y, z)$; ce qui démontre (262).

Mais ce calcul ne donne pas le potentiel intérieur de la bobine. Soit M_0M une ligne arbitraire, dont l'arc l se termine au point M (*fig.* 15),

$$(264) \qquad x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta,$$

et dont l'extrémité M_0 est à l'infini, du côté des arcs négatifs. La partie bien définie du potentiel de la bobine $\mathfrak{S}'$ au point M est (76)

$$(265) \qquad \vartheta = -\int_{-\infty}^{l}\left(A_1\frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1\frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\right)dl_1,$$

en posant

$$(266) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ B = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ C = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases} \qquad (11)$$

et

$$(267) \qquad \begin{cases} F = \dfrac{1}{\delta z'}\displaystyle\int_{-R}^{R}dz'\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\varphi'}\,d\varphi', \\ G = \dfrac{1}{\delta z'}\displaystyle\int_{-R}^{R}dz'\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\,d\varphi', \\ H = \dfrac{1}{\delta z'}\displaystyle\int_{-R}^{R}dz'\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\,d\varphi' \end{cases} \qquad (110)$$

Substituant

$$(268)\quad \begin{cases} x' = R' \sin\theta' \cos\varphi', \\ y' = R' \sin\theta' \sin\varphi', \\ z' = R' \cos\theta', \\ r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}, \end{cases}$$

on trouve

$$(269)\quad \begin{cases} F = -\dfrac{I'R'^2}{\partial z'} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \dfrac{\sin\theta' \sin\varphi'}{r}\, d\varphi', \\ G = \dfrac{I'R'^2}{\partial z'} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \dfrac{\sin\theta' \cos\varphi'}{r}\, d\varphi', \\ H = 0. \end{cases}$$

Or $\frac{1}{r}$ est développable en série convergente sous l'une des deux formes suivantes (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 543) :

$$(270)\quad \text{Pour } a < R' \ldots \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R'}\left(P'_0 + P'_1 \frac{a}{R'} + P'_2 \frac{a^2}{R'^2} + \ldots + P'_n \frac{a^n}{R'^n} + \ldots\right),$$

$$(271)\quad \text{Pour } a > R' \ldots \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(P'_0 + P'_1 \frac{R'}{a} + P'_2 \frac{R'^2}{a^2} + \ldots + P'_n \frac{R'^n}{a^n} + \ldots\right);$$

et la définition la plus générale d'une fonction Y_n étant (même volume, p. 541) toute fonction rationnelle, entière et du degré n, de $\cos\theta$, $\sin\theta \cos\varphi$ et $\sin\theta \sin\varphi$, qui satisfait à l'équation

$$(272)\quad \frac{\partial^2 Y_n}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial Y_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0,$$

on voit que les deux fonctions $\sin\theta \sin\varphi$ et $\sin\theta \cos\varphi$ satisfont à la définition de Y_1. En désignant par Y'_n ce que devient Y_n, quand on accentue θ et φ, on a (équation 60, p. 543 du même volume), pour $n \gtrless n'$,

$$(273)\quad 0 = \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} Y'_n P'_n\, d\varphi'.$$

Donc, dans les deux développements de $\frac{1}{r}$ en série, les termes en P'_1

sont les seuls dont les intégrales doubles ne s'annulent pas. On les calcule par la formule (59) de la page 543 du même volume :

$$(274)\qquad \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} Y'_1 P'_1\, d\varphi' = \frac{4}{3}\pi Y_1;$$

et les fonctions (269) deviennent, en substituant (268),

$$(275)\quad \text{Pour } a < R' \ldots\quad \begin{cases} F = -\dfrac{4}{3}\pi \dfrac{I}{\delta z'}\, y, \\[2mm] G = \dfrac{4}{3}\pi \dfrac{I}{\delta z'}\, x, \\[2mm] H = 0, \end{cases}$$

$$(276)\quad \text{Pour } a > R' \ldots\quad \begin{cases} F = -\dfrac{4}{3}\pi \dfrac{I}{\delta z'} R'^3 \dfrac{y}{a^3} = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 \dfrac{I}{\delta z'} \dfrac{\partial \frac{1}{a}}{\partial y}, \\[2mm] G = \dfrac{4}{3}\pi \dfrac{I}{\delta z'} R'^3 \dfrac{x}{a^3} = -\dfrac{4}{3}\pi R'^3 \dfrac{I}{\delta z'} \dfrac{\partial \frac{1}{a}}{\partial x}, \\[2mm] H = 0. \end{cases}$$

Remplaçant $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y^2}$ par $-\dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z^2}$, on trouve, en substituant (275) et (276) dans (270) et (271),

$$(277)\quad \text{Pour } a < R' \ldots\quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = \dfrac{8}{3}\pi \dfrac{I}{\delta z'}, \end{cases}$$

$$(278)\quad \text{Pour } a > R' \ldots\quad \begin{cases} A = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 \dfrac{I}{\delta z'} \dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x\, \partial z}, \\[2mm] B = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 \dfrac{I}{\delta z'} \dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y\, \partial z}, \\[2mm] C = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 \dfrac{I}{\delta z'} \dfrac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z^2}; \end{cases}$$

puis, en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0, qui est sur l, à une distance infinie de l'origine, (265) devient

$$(279)\quad \text{Pour } a < R' \ldots \quad \mathcal{V}_{\text{int}} = \frac{8}{3}\pi\frac{I'}{\delta z'}(z_0 - z).$$

$$(280)\left\{\begin{aligned} &\text{Pour } a > R' \ldots \quad \mathcal{V}_{\text{ext.}} = -\frac{4}{3}\pi\frac{I'}{\delta z'}\int_{\infty}^{l}\frac{\partial^2 \frac{1}{a_1}}{\partial z_1 \partial l_1}\,dl_1 \\ &\qquad = -\frac{4}{3}\pi R'^3\frac{I'}{\delta z'}\left(\frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{1}{a_0}}{\partial z_0}\right) = \frac{4}{3}\pi R'^3\frac{I'}{\delta z'}\frac{z}{a^3},\end{aligned}\right.$$

en supprimant le terme infiniment petit $\frac{z_0}{a_0^3} < \frac{1}{a_0^2}$. La condition que la fonction $\mathcal{V}$ soit infiniment petite à l'infini est en défaut, ainsi que la dénomination de partie bien définie pour la région intérieure : celle-ci n'ayant pas de points à l'infini, la constante z_0 reste arbitraire dans (279); d'ailleurs, quelque valeur qu'on lui donne, la fonction $\mathcal{V}$ est discontinue à la traversée de la surface sphérique. Il est naturel de choisir, pour la symétrie, la valeur $z_0 = 0$, qui donne $\mathcal{V} = 0$ dans le plan des xy, à l'intérieur comme à l'extérieur de la bobine; et alors on a

$$(281)\qquad \mathcal{V}_{\text{int}} = -\frac{8}{3}\pi\frac{I'}{\delta z'}z,$$

$$(282)\qquad \mathcal{V}_{\text{ext.}} = \frac{4}{3}\pi R'^3\frac{I'}{\delta z'}\frac{z}{a^3} = -\frac{4}{3}\pi R'^3\frac{I'}{\delta z'}\frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial z}.$$

La force directrice D, à l'intérieur de la bobine, se réduit à sa composante C : elle est parallèle à l'axe de la bobine, dirigée dans le même sens, constante aussi en grandeur, et ne dépend que du rapport $\frac{I'}{\delta z'}$. La partie bien définie du potentiel de l'élément fictif (261) de solénoïde étant (52)

$$(283)\qquad \mathcal{V}_{k'_0} = k'_0\frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial \zeta'} = -k'_0\frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial z},$$

on voit, en y substituant (260), qu'elle est identique avec l'expression (282).

203. Une bobine sphérique agit à l'extérieur comme le système de tous les éléments de solénoïdes dans lesquels elle est décomposable, transportés parallèlement à eux-mêmes en son centre O.

En effet, $\Sigma\, dA'$ désignant l'aire plane de l'un des courants circulaires de la bobine, et $\Sigma\Sigma\, dA'$ la somme de toutes ces aires, (260) peut s'écrire

$$K'_0 = \frac{I}{\delta z'}\int_{-R}^{R} dz'\,\Sigma\, dA' = \frac{I'}{\delta z'}\int_{-R}^{R} \delta z'\,\Sigma\, dA' = I'\,\Sigma\Sigma\, dA' = \Sigma\Sigma\, I'\, dA'.$$

Or $\Sigma\Sigma I'\, dA'$ est la somme des moments de tous les éléments de solénoïdes transportés. Donc le second membre de (283) est la somme des parties bien définies de leurs potentiels, calculées après le transport; ce qui démontre **203**.

204. Deux bobines sphériques concentriques, de révolution autour du même axe Oz, étant parcourues en sens contraires par deux courants, on peut y régler le rapport des intensités de manière à rendre l'action du système nulle, soit à l'intérieur de la plus petite, soit à l'extérieur de la plus grande.

Il suffit de vérifier qu'en distinguant les deux bobines par les indices 1 et 2, l'action du système est nulle à l'intérieur de la plus petite pour

$$(284)\qquad \frac{I_1}{\delta z_1} = \frac{I_2}{\delta z_2},$$

et à l'extérieur de la plus grande pour

$$(285)\qquad R_1'^3\,\frac{I_1}{\delta z_1'} = R_2'^3\,\frac{I_2}{\delta z_2'}.$$

Les propriétés qui précèdent montrent que la bobine sphérique serait un instrument de Physique très utile, si la construction précise n'en offrait des difficultés qui n'ont pas été surmontées. C'est pourquoi on la remplace par des systèmes de bobines dont les sections méri-

diennes ont de petites dimensions par rapport à leurs rayons moyens, et ceux-ci appartiennent à des parallèles d'une même sphère. Les mêmes propriétés, qu'il serait facile de démontrer expérimentalement, permettraient d'établir, presque sans calcul, toutes les lois des forces électrodynamiques observables.

L'énoncé (204), s'il était démontré par l'expérience pour l'espace extérieur, ferait voir *a priori* qu'une bobine sphérique produit à l'extérieur l'action d'un élément de solénoïde de même axe, placé en son centre, et l'on pourrait ensuite en observer directement les lois. Le fait connu de l'aimantation uniforme d'une sphère de fer doux, placée dans un champ de force uniforme, offrirait un moyen de fonder la théorie complète du magnétisme et de l'électromagnétisme sur la neutralisation, à l'extérieur de la plus grande bobine de l'énoncé **204**, de l'action des deux bobines et d'une sphère concentrique de fer doux, contenue dans la plus petite.

205. On définit l'*aimantation uniforme*, celle dont l'intensité Φ (198) est constante en grandeur et en direction.

Dans un aimant uniforme, de volume ϖ, l'axe magnétique $\mathfrak{A}$ a la direction de l'aimantation, et le moment magnétique est

$$K_0 = \Phi\varpi. \tag{286}$$

On le voit par les formules (219), en donnant à l'axe des z la direction de l'aimantation.

206. Toute action observable entre une sphère magnétique A, pleine ou creuse, aimantée uniformément, et un système extérieur M', est la même que si tous les éléments magnétiques de la sphère étaient transportés en son centre, parallèlement à eux-mêmes.

On le démontre sans difficulté, soit directement, soit par les formules précédentes.

207. Toute action observable entre une sphère pleine A, aimantée uniformément avec l'intensité Φ, et un système extérieur M', est la même que si la sphère était remplacée par une bobine sphérique $\mathfrak{S}$, de

même rayon, de même centre et de même axe, satisfaisant à la relation

(287) $$\Phi = \frac{I}{\delta z}.$$

Car les énergies $W_{M',\mathcal{E}}$ et $W_{M',A}$ (220) et (220) s'identifient en même temps que les moments k_0, K_0, et les axes $\mathcal{E}$ et A ; or l'égalité des expressions k_0 (260) et K_0 (286) résulte de l'équation (287).

208. Toute action observable entre une sphère magnétique creuse, aimantée uniformément avec l'intensité Φ, et un système *M'*, dont chaque point est à son extérieur ou dans sa cavité, est la même que si la sphère était remplacée par le système des deux bobines sphériques **204**, coïncidant avec ses deux surfaces, dont la plus grande aurait son axe dans la direction de l'aimantation, et qui seraient assujetties à la relation (284)

(288) $$\frac{I_1}{\delta z_1'} = \frac{I_2}{\delta z_2'} = \Phi'.$$

La démonstration n'offre aucune difficulté.

209. Donc une sphère creuse, aimantée uniformément, éprouve et produit, en présence d'un système intérieur, une action nulle; et en présence d'un système extérieur, les mêmes actions que si tous ses éléments magnétiques étaient transportés en son centre, parallèlement à eux-mêmes.

210. Une sphère magnétique, pleine ou creuse, aimantée uniformément, séparée en deux parties par une fente sphérique concentrique et infiniment mince, produit en un point de cette fente la même action que la partie intérieure.

Car l'action de la partie extérieure (n° **209**) est nulle.

Énergie d'un courant circulaire $\mathcal{E}$, *d'intensité* I *et de rayon u, dans le champ de force d'un système extérieur, rigide et permanent, M', susceptible de comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre.*

211. Soient (*fig.* 16) O le centre du courant, O*z* son axe de révolution. L'énergie demandée, déduite des équations (102) et (101),

est

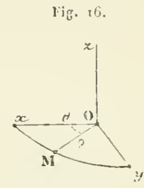
$$(289) \qquad W_{M',\varepsilon} = -I\int\int C\,dA = -I\int_0^u \rho\,d\rho\int_0^{2\pi} C\,d\theta,$$

et la série de Taylor donne

$$(290) \qquad C = \sum_p\sum_q \frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\,\rho^{p+q}\cos^p\theta\cos^q\theta\,\frac{\partial^{p+q}C_0}{\partial x^p\,\partial y^q},$$

C_0 et C désignant la composante parallèle à Oz de la force directrice

Fig. 16.



de M' à l'origine O (*fig.* 16), et au point M

$$(291) \qquad x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = 0.$$

On a (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 133)

$$(292) \qquad \int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta\sin^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1.3\ldots(2m-1).1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2m+2n)}\,2\pi:$$

et cette intégrale est nulle si $2m$ et $2n$ ne sont pas tous deux pairs. On trouve ainsi

$$(293) \qquad W_{M',\varepsilon} = -4\pi I\sum_p\sum_q\frac{1}{p!\,q!\,(p+q+1)},\left(\frac{u}{2}\right)^{2p+2q+2}\frac{\partial^{2p+2q}C_0}{\partial x^{2p}\,\partial y^{2q}},$$

et, à l'aide de l'équation $\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} = 0$,

$$(294') \quad \left\{ \begin{aligned} W = \pi u^2 I \Big[& -\frac{1}{1!} C_0 + \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \\ & - \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \cdots \Big]. \end{aligned} \right.$$

Application de la formule (294') à certaines bobines, qui jouissent approximativement de quelques propriétés des éléments de solénoïdes.

212. Soit un système de deux courants circulaires, parallèles au précédent, de même rayon u, de même intensité I, ayant leurs centres sur l'axe des z, aux points $z = +h$, $z = -h$. Soient $C(h)$ et $C(-h)$ les valeurs de C en ces deux points. On passe de l'énergie (294') à celle de ce système, en y remplaçant C_0 par $C(h) + C(-h)$, et l'on a

$$(295) \quad \left\{ \begin{aligned} W = 2\pi u^2 I \Big[& -\frac{1}{1!} + \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & - \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6}{\partial z^6} - \cdots \Big] \\ & \times \left(C_0 + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \cdots \right), \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$(295') \quad W = 2\pi u^2 I \left\{ \begin{array}{l} -C_0 \left| \begin{array}{l} -\frac{h^2}{2!} \\ +\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \end{array} \right| \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \left| \begin{array}{l} -\frac{h^4}{4!} \\ +\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{h^2}{2!} \\ -\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \end{array} \right| \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} \left| \begin{array}{l} -\frac{h^6}{6!} \\ +\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{h^4}{4!} \\ -\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{h^2}{2!} \\ +\frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \end{array} \right| \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \cdots \end{array} \right\}.$$

Pour h et u infiniment petits, la série (295') se réduit à son premier terme, et, pour que W diffère le moins possible de cette valeur-limite,

il faut que le second terme de la série soit nul, ou que l'on ait

$$(296) \qquad h = \frac{u}{2}.$$

(295') devient alors

$$(297) \qquad W = 2\pi u^2 I\left(-C_0 + \frac{3}{64} h^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \frac{61}{46080} h^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} + \cdots\right).$$

215. Soit une bobine à un seul rang de fil, terminée aux deux plans $z = +h$, $z = -h$, et δz la distance de deux spires consécutives.

Elle sera assimilée, avec une approximation suffisante, à un système de courants circulaires, formant les sections droites d'un cylindre, et en partageant la hauteur en éléments δz, c'est-à-dire en parties égales et assez petites pour être traitées comme infiniment petites.

L'énergie de l'action de M' sur cette bobine se déduit de (294), en remplaçant C_0 par

$$\int_{-h}^{h} \frac{C}{\delta z} dz = -\frac{1}{\delta z}\int_{-h}^{h} \frac{\partial V}{\partial z} dz$$
$$= -\frac{V(h) - V(-h)}{\delta z} = -\frac{2}{\delta z}\left(\frac{h}{1!}\frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 V_0}{\partial z^3} + \cdots\right)$$

ou

$$(298) \qquad \int_{-h}^{h} \frac{C}{\delta z} dz = \frac{2h}{\delta z}\left(C_0 + \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{5!}\frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \cdots\right).$$

On trouve ainsi, pour la bobine (nº **215**),

$$(299) \quad \left\{ \begin{aligned} W = 2\pi u^2 h \frac{I}{\delta z}\Big[-1 &+ \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &- \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6}{\partial z^6} - \cdots\Big] \\ \times \left(C_0 + \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{5!}\frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \cdots\right) \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$(299')\quad W = 2\pi u^2 h \frac{1}{\delta z}\left\{\begin{array}{l|l|l|l} -C_0 - \dfrac{h^2}{3!} & \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\;-\dfrac{h^4}{5!} & \dfrac{\partial^4 C_0}{\partial z^4}\;-\dfrac{h^6}{7!} & \dfrac{\partial^6 C_0}{\partial z^6}\;-\ldots \\ \quad + \dfrac{1}{1!\,2!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^2 & \quad + \dfrac{1}{1!\,2!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^2 \dfrac{h^2}{3!} & \quad + \dfrac{1}{1!\,2!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^2 \dfrac{h^4}{5!} & \\ & \quad - \dfrac{1}{2!\,3!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^4 & \quad - \dfrac{1}{2!\,3!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^4 \dfrac{h^2}{3!} & \\ & & \quad + \dfrac{1}{3!\,4!}\left(\dfrac{u}{2}\right)^6 & \end{array}\right\}.$$

Le coefficient de $\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}$ est nul pour

$$(300)\qquad h = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,u;$$

alors la figure de la bobine est celle d'un cylindre, ayant pour diamètre et pour hauteur la base et la hauteur d'un triangle équilatéral; et (299′) devient

$$(301)\quad W = \sqrt{3}\,\pi u^3 \frac{1}{\delta z}\left[-C_0 + \frac{11}{5!}\left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \frac{13}{7!}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} + \cdots\right].$$

214. Soit une bobine creuse, de rayons U et u, dont la bobine (nº **213**) constitue un rang, et soit $\delta\rho$ la distance de deux rangs consécutifs. L'énergie de cette bobine, dans le champ de force donné, se déduit de l'expression (299), mise sous la forme $W = f(u)$, en y remplaçant $f(u)$ par $\frac{1}{\delta\rho}\int_u^U f(\rho)\,d\rho$, ou u^{2p} par $\frac{1}{\delta\rho}\,\dfrac{U^{2p+1} - u^{2p+1}}{2p+1}$.

En faisant cette substitution dans (299′), on en déduit, pour la bobine (nº **214**),

$$(302)\quad W = 16\pi \frac{h\,1}{\delta z\,\delta\rho}\left\{\begin{array}{l|l|l|l} -\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^3-\left(\frac{u}{2}\right)^3}{3}C_0 - \dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^3-\left(\frac{u}{2}\right)^3}{3}\dfrac{h^2}{3!} & \dfrac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\;-\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^3-\left(\frac{u}{2}\right)^3}{3}\dfrac{h^4}{5!} & \dfrac{\partial^4 C_0}{\partial z^4}\;-\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^3-\left(\frac{u}{2}\right)^3}{3}\dfrac{h^6}{7!} & \dfrac{\partial^6 C_0}{\partial z^6}\;-\ldots \\ \qquad + \dfrac{1}{1!\,2!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^5-\left(\frac{u}{2}\right)^5}{5} & \quad + \dfrac{1}{1!\,2!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^5-\left(\frac{u}{2}\right)^5}{5}\dfrac{h^2}{3!} & \quad + \dfrac{1}{1!\,2!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^5-\left(\frac{u}{2}\right)^5}{5}\dfrac{h^4}{5!} & \\ & \quad - \dfrac{1}{2!\,3!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^7-\left(\frac{u}{2}\right)^7}{7} & \quad - \dfrac{1}{2!\,3!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^7-\left(\frac{u}{2}\right)^7}{7}\dfrac{h^2}{3!} & \\ & & \quad + \dfrac{1}{3!\,4!}\dfrac{\left(\frac{U}{2}\right)^9-\left(\frac{u}{2}\right)^9}{9} & \end{array}\right\}.$$

Pour que la série diffère le moins possible de son premier terme, auquel elle se réduirait, si les dimensions de la bobine étaient infiniment petites, il faut que le coefficient de son second terme soit nul; d'où

$$(303)\qquad 2h = \sqrt{1,8}\sqrt{\frac{U^5-u^5}{U^3-u^3}} = \sqrt{0,45}\sqrt{\frac{(2U)^5-(2u)^5}{(2U)^3-(2u)^3}}.$$

Calculant $2h$ par cette formule pour 11 et 9^{cm} de diamètre, on a

$$(304)\qquad \begin{cases} 2U = 11^{cm}, \quad 2u = 9^{cm}, \\ 2h = \sqrt{0,45}\sqrt{\dfrac{102002}{602}} = 8^{cm},731972\ldots \end{cases}$$

Mettant U et u sous les formes $\rho(1+e)$ et $\rho(1-e)$, on trouve

$$(305)\qquad \begin{cases} U = \rho(1+e), \quad u = \rho(1-e), \\ h = \rho\sqrt{0,75}(1 + 0,8333\ldots e^2 \\ \qquad - 0,525e^4 + 0,4967592592\ldots e^6 + \ldots), \end{cases}$$

$$(306)\qquad \begin{cases} W = \dfrac{2\pi I}{\delta z\,\delta\rho} er^4\Big[-\Big(1+\dfrac{e^2}{3}\Big)C_0 \\ \qquad + \dfrac{11 - 51e^2 + 64,955\ldots e^4 - 16,984\ldots e^6 - \ldots}{120} \\ \qquad \times \Big(\dfrac{r}{2}\Big)^4 \dfrac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \ldots\Big]\dfrac{2h}{r}. \end{cases}$$

Si l'axe ξ de la bobine (n° **213**), au lieu d'être dirigé suivant l'axe des z, a une direction quelconque, définie par les cosinus directeurs α, β, γ; C_0 doit être remplacé par $\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0$ dans l'équation (301), qui devient

$$(307)\qquad \begin{cases} W = \sqrt{3}\pi\dfrac{I}{\delta z}u^3\Big[-(\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0) \\ \qquad + \dfrac{11}{120}\Big(\dfrac{u}{2}\Big)^4\Big(\alpha\dfrac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} + \beta\dfrac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \gamma\dfrac{\partial^4 C_0}{\partial z^4}\Big) - \ldots\Big]. \end{cases}$$

La condition d'équilibre de la bobine (n° **213**), mobile autour de

l'axe des z, est que le moment, par rapport à cet axe, de l'action de M' sur cette bobine Ξ, soit nul :

$$(308)\qquad (M', \Xi)_{xy} = -\frac{\partial W}{\partial(xy)} = 0$$

ou (307)

$$(309)\qquad \frac{\partial}{\partial(xy)}\left\{\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0 - \frac{11}{120}\left(\frac{u}{2}\right)^2\left(\alpha\frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \beta\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \gamma\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\right) + \ldots\right\} = 0.$$

Mais

$$(310)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial(xy)} = -\beta, \quad \frac{\partial\beta}{\partial(xy)} = \alpha, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial(xy)} = 0;$$

(309) devient

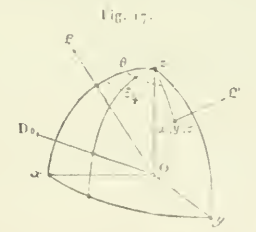
$$(311)\qquad \alpha B_0 - \beta A_0 = \frac{11}{120}\left(\frac{u}{2}\right)^2\left(\alpha\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} - \beta\frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}\right) + \ldots,$$

et, en supposant $\beta = 0$,

$$(312)\qquad B_0 = \frac{11}{120}\left(\frac{u}{2}\right)^2\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \ldots.$$

Si la bobine devenait infiniment petite, $\alpha B_0 - \beta A_0$ le deviendrait en même temps (311); par suite, le plan azimutal de son axe ξ viendrait coïncider avec celui de D_0, comme on l'a déjà vu (n° **127**), et

Fig. 17.



tournerait, pour $\beta = 0$, du petit angle ε_4 (*fig.* 17) qui a pour tangente

$$(313)\qquad \tang\varepsilon_4 = \frac{B_0}{A_0}.$$

215. Sachant que M' équivaut à un système d'éléments de solenoïdes, on peut trouver l'ordre de grandeur de ε_4, en considérant le cas le plus simple, celui où M' se réduirait à un seul élément k' de solénoïde, placé à la distance r de l'origine. Soient (*fig.* 17)

(314) $$x' = ar, \quad y' = br, \quad z' = cr, \quad \mathrm{k}' \quad \text{et} \quad \alpha', \beta', \gamma'$$

ses coordonnées, son moment et les cosinus directeurs de son axe ξ'.

La partie bien définie de son potentiel à l'origine sera (52)

$$\mathcal{V}_0 = \mathrm{k}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi'} = - \mathrm{k}' \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{r^3};$$

d'où

(315) $$\mathrm{A}_0 = - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial x'} = - \mathrm{k}' \left(\frac{\alpha'}{r^3} - 3 \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{r^4} \frac{x'}{r} \right),$$

(316) $$\begin{cases} \mathrm{B}_0 = - \dfrac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial y'} \\ \quad = \mathrm{k}' \left(\alpha' \dfrac{\partial}{\partial x'} + \beta' \dfrac{\partial}{\partial y'} + \gamma' \dfrac{\partial}{\partial z'} \right) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \\ \quad = \mathrm{k}' \dfrac{3 ab \alpha' + (3 b^2 - 1) \beta' + 3 bc \gamma'}{r^3}, \end{cases}$$

(317) $$\frac{\partial^2 \mathrm{B}_0}{\partial z^2} = \mathrm{k}' \left(\alpha' \frac{\partial}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial y' \, \partial z'^2}.$$

L'équation $\mathrm{B}_0 = 0$ est sensiblement satisfaite dans la position d'équilibre cherchée ; et, si elle l'était, on aurait, en vertu de (316),

$$0 = 3b(a\alpha' + b\beta' + c\gamma') - \beta';$$

d'où

(318) $$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \frac{\beta'}{3b}.$$

Cette équation peut être introduite dans le calcul approximatif du second membre de l'équation (312), qui devient

$$(319)\quad \begin{cases} B_0 = \dfrac{11}{2}\left(\dfrac{u}{2}\right)^4 \dfrac{S_4\beta' + T_4\gamma'}{r^7}, \\ S_4 = 1 + 21c^2(2c^2 - 1), \\ T_4 = 21bc(1 - 3c^2). \end{cases}$$

On trouve, en substituant (314) et (318) dans (315), puis (319) et (320) dans (313),

$$(320)\qquad A_0 = k'\frac{a\beta' - b\alpha'}{br^3},$$

$$(321)\qquad \operatorname{tang}\varepsilon_4 = \frac{11}{32}\left(\frac{u}{r}\right)^4 \frac{S_4\beta' + T_4\gamma'}{a\beta' - b\alpha'} b + \ldots.$$

Calcul de la longueur magnétique 2l d'une aiguille aimantée A qui, mobile autour de son centre de gravité placé au même point O que la bobine (n° 213), *et sous l'action d'un même système extérieur M', s'orienterait, avec la même précision, comme si elle était infiniment courte.*

216. L'aiguille est assimilée, par hypothèse, au système de ses deux pôles $+m$ et $-m$, placés sur l'axe des z aux points $z = +l$, $z = -l$. L'énergie W de l'action exercée sur cette aiguille par le système extérieur M', dont le potentiel est V_0 à l'origine O, V au point (x, y, z), $V(l)$ au pôle positif, et $V(-l)$ au pôle négatif, a pour expression $mV(l) - mV(-l)$, ou

$$(322)\qquad W = 2m\left(\frac{l}{1!}\frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{l^3}{3!}\frac{\partial^3 V_0}{\partial z^3} + \frac{l^5}{5!}\frac{\partial^5 V_0}{\partial z^5} + \cdots\right);$$

et si l'axe A de l'aimant a une direction quelconque, définie par les cosinus directeurs α, β, γ, $\dfrac{\partial V_0}{\partial z} = -C_0$ doit être remplacé par la somme

$-\alpha A_0 - \beta B_0 - \gamma C_0$, et (322) devient

$$(323)\quad \left\{ \begin{aligned} W = -\,2ml\Big[& \frac{\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0}{1!} \\ & + \frac{l^2}{3!}\left(\alpha \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\right) \\ & + \frac{l^4}{5!}\left(\alpha \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} + \beta \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4}\right) + \cdots \Big]. \end{aligned} \right.$$

La condition d'équilibre de l'aimant, mobile autour de l'axe des z, est $\dfrac{\partial W}{\partial(xy)} = 0$ ou

$$\frac{\partial}{\partial(xy)}\left[\frac{\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0}{1!} + \frac{l^2}{3!}\left(\alpha \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}\right) + \cdots\right] = 0,$$

et, en substituant (310),

$$(324)\quad \alpha B_0 - \beta A_0 + \frac{l^2}{3!}\left(\alpha \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}\right) + \frac{l^4}{5!}\left(\alpha \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} - \beta \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4}\right) + \cdots = 0;$$

puis, supposant $\beta = 0$,

$$(325)\quad B_0 + \frac{l^2}{3!}\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \frac{l^4}{5!}\frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \cdots = 0.$$

L'équation analogue de (313)

$$(326)\quad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = \frac{B_0}{A_0}$$

donne l'angle ε_2 que fait l'azimut d'équilibre de l'axe de l'aiguille avec la position qu'il prendrait, si elle était infiniment petite.

217. Considérant l'équilibre de l'aimant sous l'action de l'élément k' de solénoïde, qui agissait précédemment sur la bobine (nº **215**), appliquant à ce courant et à l'axe $\mathcal{A}$ les notations (314), on trouve, à l'aide de (318),

$$(327)\quad \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = 2k'\frac{S_2\beta' + T_2\gamma'}{r^5}, \quad S_2 = 10c^2 - 1, \quad T_2 = -15bc.$$

(325) donne ensuite

$$(328)\qquad B_0 = -\frac{2 l^2}{3!} k' \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{r^5} - \ldots.$$

On trouve, en substituant (320) et (328) dans (326),

$$(329)\qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{a \beta' - b' \alpha'} b - \ldots,$$

puis, divisant par (321),

$$(330)\qquad \frac{\operatorname{tang} \varepsilon_2}{\operatorname{tang} \varepsilon_4} = -\frac{32}{33} \frac{l^2 u^2}{r^4} \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{S_4 \beta' + T_4 \gamma'}.$$

On voit (330) que ε_2 et ε_4 seront du même ordre de grandeur pour

$$(331)\qquad \frac{lr}{u^2} = 1,$$

par exemple, pour

$$(332)\qquad l = 0^{cm},5, \quad u = 5^{cm}, \quad r = 50^{cm}$$

ou encore pour

$$(333)\qquad l = 0^{cm},5, \quad u = 10^{cm}, \quad r = 200^{cm}.$$

Ainsi, quand le centre d'un système agissant à peu près comme un élément de solénoïde est à 2^m d'une bobine (n° **215**), à un seul rang de fil, satisfaisant à l'équation (300), ayant 20^{cm} de diamètre; elle s'oriente autour de la verticale de son centre de gravité, comme si elle était infiniment petite, avec autant de précision qu'une aiguille de 1^{cm} de longueur magnétique.

ε_4 atteint un maximum, du moins dans le cas particulier où l'on a

$$(334)\qquad c = \gamma' = 0.$$

Alors (318) devient

$$(335)\qquad (3b^2 - 1)\beta' - 3ab\alpha = 0.$$

Substituant (334) dans (319), on a

(336) $$S_4 = 1, \quad T_4 = 0.$$

(321) devient, en vertu de (336), (335) et (334),

(337) $$\operatorname{tang} \varepsilon_4 = \frac{11}{32} \left(\frac{u}{r}\right)^4 \frac{\beta' b}{a\beta' - b\alpha'} = \frac{11}{32} \left(\frac{u}{r}\right)^4 \frac{3ab}{2}.$$

Soit (*fig.* 17)

(338) $$a = \cos \vartheta, \quad b = \sin \vartheta;$$

on a

(339) $$\operatorname{tang} \varepsilon_4 = \frac{33}{128} \left(\frac{u}{r}\right)^4 \sin 2\vartheta.$$

Dans le cas particulier (334), le rapport (330) devient

(340) $$\frac{\operatorname{tang} \varepsilon_2}{\operatorname{tang} \varepsilon_4} = \frac{32}{33} \frac{l^2 r^2}{u^4},$$

et, par suite, $\frac{32}{33}$, quand la relation (331) est satisfaite. Dans ce même cas (334), et pour $\frac{u}{r} = \frac{1}{10}$, (339) donne

(341) $$\varepsilon_4 = 5'', 318 \sin 2\vartheta.$$

Cette valeur répond aux dimensions (332) : elle serait 16 fois plus petite si l'on adoptait les dimensions (333).

XII. — Sur la réduction aux unités absolues de toutes les forces observables entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre.

Définition générale des unités absolues.

218. On sait que toute grandeur continue, réductible en nombres, dérive des trois unités fondamentales

(342) $$[L], \quad [M], \quad [T]$$

de longueur, de masse et de temps. Les rapports d'une grandeur concrète U à deux autres de même espèce, [U] et [U'], prises successivement pour unités, sont deux nombres abstraits

$$(343)\qquad u = \frac{U}{[U]}, \quad u' = \frac{U}{[U']},$$

satisfaisant à la relation

$$(344)\qquad U = u[U] = u'[U'];$$

d'où

$$(345)\qquad \frac{u'}{u} = \frac{[U]}{[U']}.$$

Si [U] est une unité dérivée, les nombres u et u', qui mesurent la grandeur concrète de même espèce U, quand on prend successivement [L], [M], [T] et [L'], [M'], [T'] pour unités fondamentales, sont liés généralement par une relation de la forme homogène

$$\frac{u'}{u} = \left[\frac{L}{L'}\right]^a \left[\frac{M}{M'}\right]^b \left[\frac{T}{T'}\right]^c;$$

d'où résulte (345)

$$\left[\frac{U}{U'}\right] = \left[\frac{L}{L'}\right]^a \left[\frac{M}{M'}\right]^b \left[\frac{T}{T'}\right]^c.$$

Donc

$$(346)\qquad [U] = f[L^a M^b T^c],$$

en posant

$$(347)\qquad f = \left[\frac{U'}{L'^a M'^b T'^c}\right].$$

219. On appelle a, b, c les *dimensions* de [U] par rapport aux trois unités fondamentales.

Autant qu'on peut le faire sans incompatibilité, on est convenu de prendre pour unité dérivée de chaque espèce celle qui répond aux trois unités fondamentales, c'est-à-dire de faire $f = 1$ dans la formule (346).

qui devient

(348) $$[U] = [L^a M^b T^c].$$

220. L'ensemble de toutes les formules *simultanément* réductibles à la forme (348) constitue un *système coordonné d'unités absolues*, dérivant toutes des trois unités (342), et complètement définies par le choix de celles-ci.

Tel est le système qui comprend toutes les formules de Géométrie et de Mécanique. Par exemple, les dimensions des unités de surface $[\omega]$ et de volume $[\varpi]$ sont données par les formules

(349) $$[\omega] = [L^2], \quad [\varpi] = [L^3];$$

celles des unités de vitesse, d'accélération, de force et de travail, déduites des formules

(350) $$v = \frac{ds}{dt}, \qquad w = \frac{d^2 s}{dt^2}, \qquad F = m\frac{d^2 s}{dt^2}, \qquad d\mathcal{E} = F\,ds,$$

sont représentées respectivement par les suivantes :

(351) $$[v] = [LT^{-1}], \quad [w] = [LT^{-2}], \quad [F] = [MLT^{-2}], \quad [\mathcal{E}] = [ML^2T^{-2}].$$

Ce qui est nouveau, c'est seulement l'introduction des unités absolues en Physique. On peut rechercher les avantages suivants dans le choix des trois unités fondamentales :

1° Avoir des unités fondamentales de grandeur ordinaire;

2° Avoir des unités dérivées de grandeur ordinaire;

3° Avoir, s'il est possible, un système unique, comprenant toutes les grandeurs continues, réductibles en nombres.

L'*Association britannique*, sacrifiant le premier avantage pour avoir le second, dans les unités dérivées de l'électrodynamique et du magnétisme, a proposé les trois unités fondamentales suivantes :

221.
- Unité de longueur, $[L]_{B.A.} = 10\,000\,000$ de mètres;
- Unité de masse, $[M]_{B.A.} =$ la masse du gramme, multipliée par 10^{-11};
- Unité de temps, $T =$ la seconde du jour solaire moyen.

Mais cet avantage ne se retrouvait ni en électrostatique, ni dans les autres unités dérivées, géométriques, mécaniques et physiques.

Le *Congrès international de Paris*, préférant le premier avantage, a adopté pour unités fondamentales :

222. Le centimètre, le gramme-masse et la seconde (système C.G.S.).

Il a suppléé au deuxième, en définissant les *unités pratiques* de l'électrodynamique et du magnétisme au moyen des unités absolues C.G.S., multipliées par des puissances de 10, dont les exposants, toujours entiers, ont été choisis de manière à reproduire les unités absolues qui dérivent du système **221**.

Si le troisième avantage était possible, on pourrait lui sacrifier les deux autres; on y suppléerait en adjoignant une unité pratique à chaque unité absolue, soit fondamentale, soit dérivée, et définissant le rapport de l'une à l'autre par une puissance de 10. Même au point de vue théorique, cette possibilité n'est que probable : elle est subordonnée à l'hypothèse d'un milieu unique, qu'on assimile à l'éther, et dont les divers modes de mouvement constituent tous les phénomènes matériels. Cette hypothèse, très rationnelle, est contestée pourtant, et le sera sans doute, tant qu'elle n'aura pas complété, par la gravitation universelle et la Chimie, la réduction de tous les phénomènes matériels à l'unité mathématique que l'Astronomie doit à Newton. Il y a donc lieu de présumer, mais non d'affirmer, que le troisième avantage sera réalisé un jour par les unités suivantes, dont deux sont indiquées dans le *Traité* de Maxwell *sur l'Électricité et le Magnétisme* :

223.
- Unité de longueur, la longueur d'onde, dans le vide, d'une raie déterminée du spectre;
- Unité de masse, celle de l'unité de volume d'éther, dans le vide;
- Unité de temps, la durée d'une vibration de la même onde lumineuse.

On ne sait mesurer ni la première, ni la troisième avec autant de précision que les unités C.G.S., et l'on ne connaît pas la deuxième.

Il y a actuellement, dans le système adopté (n° **222**), deux systèmes

d'unités électriques, le système électrostatique et le système électromagnétique; et le rapport des grandeurs des deux unités dérivées qui mesurent une même quantité, dans ces deux systèmes, est toujours une puissance entière d'une certaine vitesse absolue v, sensiblement sinon rigoureusement égale à celle de la lumière; d'où résulte que ce rapport devient égal à l'unité, quand on adopte le système **225**, ou tout autre dans lequel $v = 1$.

224. *Sur la possibilité de réduire à un seul système d'unités absolues, bien connu sous le nom de* système électromagnétique, *toutes les actions observables entre les courants fermés, les aimants et le magnétisme terrestre.* — Cette possibilité, admise partout, n'était démontrée nulle part : elle l'a été implicitement dans ce Mémoire, où la réduction se trouve toute faite. Elle repose sur la coïncidence des directions d'équilibre stable des axes d'un élément magnétique et d'un élément de solénoïde, mobiles autour de leurs centres de gravité, quand ceux-ci sont placés successivement en un même point d'un champ de force donné. Elle a été établie précédemment comme conséquence des deux principes expérimentaux **122** et **165**, d'où résulte cette coïncidence. Elle ne l'est pas, quand on démontre séparément, comme on l'a fait jusqu'ici, les lois des actions mutuelles entre les pôles de deux solénoïdes, ceux de deux aimants et le magnétisme terrestre, qui vont être désignés respectivement par

$$(352) \qquad \mu, \mu', \quad m, m' \quad \text{et} \quad T.$$

Cette lacune, que les ouvrages didactiques ne paraissaient pas soupçonner, y a été signalée pour la première fois dans les *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, par MM. Mascart et Joubert. A une question équivalente à l'énoncé **224**, on y trouve (nº **455**) la réponse suivante : « L'affirmative paraît probable. » C'est cette affirmative qui a été démontrée dans ce Mémoire.

En supposant placés à la même distance mutuelle r les deux pôles dont on considère successivement les actions réciproques, on établit ainsi les cinq formules suivantes, dans lesquelles D désigne la force directrice du magnétisme terrestre, c'est-à-dire celle qu'il exerce sur

l'unité positive de pôle de solénoïde.

$$(353)\qquad (\mu', \mu) = (\mu, \mu') = \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

$$(354)\qquad (\mu', m) = (m, \mu') = \frac{m\mu'}{r^2},$$

$$(355)\qquad (T', \mu) = \mu D,$$

$$(356)\qquad (m', m) = (m, m') = f\frac{mm'}{r^2},$$

$$(357)\qquad (T', m) = gmD.$$

Les actions mutuelles de deux pôles sont dirigées suivant r, et sont répulsives quand elles sont positives; f et g sont deux coefficients positifs.

Après avoir choisi arbitrairement les trois unités fondamentales, on peut toujours réduire à l'unité les trois coefficients des formules (353), (354) et (355), par un choix convenable des trois unités physiques, qui se trouvent ainsi définies de la manière suivante :

225. L'*unité de pôle de solénoïde* est celle qui repousse son égale avec l'unité de force à l'unité de distance.

226. L'*unité de pôle d'aimant* est celle que l'unité de pôle de solénoïde repousse avec l'unité de force à l'unité de distance.

227. L'*intensité d'un champ de force électrodynamique* quelconque, et en particulier du champ magnétique terrestre, en un point donné, est égale à la force qui sollicite l'unité de pôle de solénoïde, placée en ce point.

Mais, après le choix des trois unités fondamentales (342) et des trois unités dérivées **225**, **226** et **227**, les coefficients f et g ne peuvent être déterminés que par expérience.

Car l'unité de pôle d'aimant étant définie (n° **226**) indépendamment de son action sur son égale à l'unité de distance, et le principe de la conservation de l'énergie ayant lieu, quel que soit f (356), ce coefficient reste indéterminé, tous les principes rationnels étant sauvegardés, quand on fait abstraction de toute hypothèse. La valeur $f = 1$, déduite

du principe **122**, ne peut avoir lieu que par un hasard bien singulier, ou en vertu de l'*identité des causes des actions mutuelles entre les aimants et les solénoïdes*. L'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère, qui implique cette identité, se trouve ainsi en partie démontrée. Mais elle ne l'est pas complètement : la valeur $f = 1$ s'explique également par un même mode de propagation des actions des aimants et des courants dans un même milieu.

Après que l'expérience a donné $f = 1$, si l'on attribue cette valeur au hasard, et si l'on s'abstient de toute hypothèse, le coefficient g reste encore indéterminé dans l'équation (357); car l'unité de pôle magnétique ayant été définie (n° **226**) indépendamment de la force qui la sollicite dans le champ magnétique de la Terre, cette force ne paraît pas pouvoir être déterminée autrement que par des expériences indépendantes des précédentes. On a vu (n° **224**) quelles expériences on peut invoquer pour en conclure la valeur $g = 1$.

En résumé, les valeurs

$$f = 1, \quad g = 1 \tag{358}$$

des coefficients des formules (356) et (357) n'ont jamais été ni contestées ni démontrées. Il est d'ailleurs évident qu'elles résultent de l'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère.

Comment on pourrait déterminer les coefficients f et g des formules (356) *et* (357), *s'ils étaient différents de l'unité.*

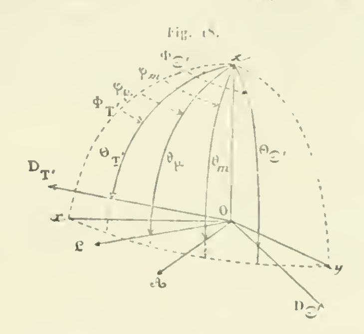
Les valeurs (358) sont bien établies, dans ce Mémoire, comme conséquences des principes expérimentaux **122** et **165**. Mais, comme ces principes reposent sur des expériences qui n'ont pas été faites directement, il n'est peut-être pas inutile de donner une méthode traitant f et g comme deux inconnues, et montrant que, si les relations (358) n'étaient pas satisfaites très approximativement, on aurait sans doute remarqué le fait suivant, contraire au principe **224**.

228. Si une aiguille aimantée et un solénoïde de déclinaison infiniment petits étaient placés successivement en un même point O, sous

l'action d'un même système extérieur $\mathcal{M}'$, pouvant comprendre un système $\mathfrak{C}'$ de courants fermés, un système $\mathcal{A}'$ d'aimants, et le magnétisme terrestre T', et assujettis à tourner autour de la verticale Oz; leurs axes oscilleraient autour de deux azimuts généralement différents.

En effet, si un élément k de solénoïde, de moment k et d'axe μ, et un élément magnétique K, de moment K et d'axe m, ayant leurs centres de gravité placés successivement en un même point O, pris pour origine de trois axes à gauche rectangulaires (*fig.* 18), ne pouvaient que

Fig. 18.



tourner autour de la verticale Oz, sous l'action du système extérieur $\mathcal{M}'$, les moments, par rapport à Oz, des forces exercées sur k et sur K seraient représentés, en vertu des notations (352) et des formules (353), (354), (355), (356) et (357), par les six expressions suivantes, dont la première est l'équation (148'). La *fig.* 18 correspond au cas où il n'y a pas d'aimant dans le système $\mathcal{M}'$.

(359) $$(\mathfrak{C}', k)_{xy} = \mathrm{k} \sin\zeta_\mu \, D_{\mathfrak{C}'} \sin\Theta_{\mathfrak{C}'} \sin(\Phi_{\mathfrak{C}'} - \varphi_\mu),$$

(360) $$(\mathfrak{C}', K)_{xy} = \mathrm{K} \sin\zeta_m \, D_{\mathfrak{C}'} \sin\Theta_{\mathfrak{C}'} \sin(\Phi_{\mathfrak{C}'} - \varphi_m),$$

(361) $$(\mathcal{A}', k)_{xy} = \mathrm{k} \sin\zeta_\mu \, D_{\mathcal{A}'} \sin\Theta_{\mathcal{A}'} \sin(\Phi_{\mathcal{A}'} - \varphi_\mu),$$

(362) $$(\mathcal{A}', K)_{xy} = f\mathrm{K} \sin\zeta_m \, D_{\mathcal{A}'} \sin\Theta_{\mathcal{A}'} \sin(\Phi_{\mathcal{A}'} - \varphi_m),$$

(363) $$(T', k)_{xy} = \mathrm{k} \sin\zeta_\mu \, D_{T'} \sin\Theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu),$$

(364) $$(T', K)_{xy} = g\mathrm{K} \sin\zeta_m \, D_{T'} \sin\Theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m).$$

Il résulte immédiatement de ces trois groupes de formules que, si un seul des trois systèmes $\mathfrak{S}'$, A', T' agissait, les axes d'un élément de solénoïde et d'un élément magnétique, mobiles autour des verticales de leurs centres de gravité, placés successivement en un même point, oscilleraient toujours autour du même plan azimutal.

229. Mais il en serait autrement, le magnétisme terrestre agissant en même temps qu'un courant fermé, ou en même temps qu'un aimant, si les coefficients f et g n'étaient pas, comme on l'a vu, égaux à l'unité; et les six dernières formules permettraient d'en calculer les valeurs. Car, en faisant agir simultanément la Terre T' et un système $\mathfrak{S}'$ de courants fermés, on aurait (*fig.* 18), pour conditions d'équilibre de k,

$$(T', k)_{xy} + (\mathfrak{S}', k)_{xy} = 0,$$

et de K,

$$(T', K)_{xy} + (\mathfrak{S}', K)_{xy} = 0;$$

ce qui donne, en substituant (363) et (359) dans la première équation, (364) et (360) dans la seconde,

(365) $$D_{T'} \sin\theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu) + D_{\mathfrak{S}'} \sin\theta_{\mathfrak{S}'} \sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_\mu) = 0, \quad \Big|\; -\sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_m),$$

(366) $$g D_{T'} \sin\theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) + D_{\mathfrak{S}'} \sin\theta_{\mathfrak{S}'} \sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_m) = 0, \quad \Big|\; \sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_\mu).$$

Ajoutant ces deux équations, multipliées par les facteurs écrits sur les mêmes lignes, on trouve

$$D_{T'} \sin\theta_{T'} \big[g \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) \sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_\mu) - \sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu) \sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_m) \big] = 0;$$

d'où

(367) $$g = \frac{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_m)} : \frac{\sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_{\mathfrak{S}'} - \varphi_m)}.$$

L'expérience, qu'il faudrait faire pour établir le principe **122** a été invoquée pour démontrer que $g = 1$ et que $\varphi_\mu = \varphi_m$. On voit que (367)

donne, en effet, $g = 1$ pour $\varphi_\mu = \varphi_m$. Mais, si g avait une valeur différente de l'unité, il résulte de (367) que φ_μ différerait de φ_m; et (367) servirait à déterminer g.

En faisant ensuite agir simultanément la Terre T′ et un aimant A′, on aurait, pour conditions d'équilibre de k,

$$(\mathrm{T}', k)_{xy} + (\mathrm{A}', k)_{xy} = 0,$$

et de K,

$$(\mathrm{T}', K)_{xy} + (\mathrm{A}', K)_{xy} = 0;$$

ce qui donne, en substituant (363) et (361) dans la première équation, (364) et (362) dans la seconde,

(368) $$\mathrm{D_T}\sin\Theta_\mathrm{T}\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_\mu) + \mathrm{D_{A'}}\sin\Theta_\mathrm{A'}\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_\mu) = 0, \quad \Big|\; -f\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_m),$$

(369) $$g\mathrm{D_T}\sin\Theta_\mathrm{T}\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_m) + f\mathrm{D_{A'}}\sin\Theta_\mathrm{A'}\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_m) = 0. \quad \Big|\; \sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_\mu)$$

Ajoutant ces deux équations, multipliées par les facteurs écrits sur les mêmes lignes, on trouve

$$\mathrm{D_T}\sin\Theta_\mathrm{T}\,[g\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_m)\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_\mu) - f\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_\mu)\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_m)] = 0;$$

d'où

(370) $$\frac{g}{f} = \frac{\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_\mathrm{T} - \varphi_m)} : \frac{\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_\mathrm{A'} - \varphi_m)}.$$

L'expérience, qu'il faudrait faire pour établir le principe **122**, a servi à démontrer que l'on a $\frac{g}{f} = 1$ et $\varphi_\mu = \varphi_m$. On voit que (370) donne, en effet, $\frac{g}{f} = 1$ pour $\varphi_\mu = \varphi_m$. D'ailleurs, si $\frac{g}{f}$ n'était pas égal à l'unité, l'équation (370) permettrait d'en déterminer expérimentalement la valeur; elle montre que φ_μ différerait de φ_m. On voit, par les formules (367) et (370), que, si les relations (358) n'étaient pas satisfaites, l'énoncé **228** le serait. Il est impossible d'admettre que le défaut de coïncidence qu'on observerait alors ne soit pas très petit, sinon rigoureusement nul, puisqu'il n'a jamais été signalé.

230. L'exactitude de la valeur $f = 1$ étant hors de doute, il est difficile de ne pas attribuer les propriétés des courants et celles des aimants à une cause unique. Dès lors, on doit avoir aussi $g = 1$. Mais, si l'on doutait de l'identité des causes de ces deux phénomènes, et si l'on attribuait le magnétisme terrestre à une troisième cause inconnue, la valeur $g = 1$ ne résulterait plus de ce que f est égal à l'unité.

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther

[SUITE (1)];

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

VIII. — PRISME DROIT A BASE RECTANGLE.

Dans un prisme droit à base rectangle, les particules pondérables sont disposées suivant trois lignes rectangulaires parallèles aux arêtes du prisme, nous dirigerons les axes de coordonnées suivant ces trois lignes, et l'origine sera toujours le centre d'une cellule. Si l'on désigne par ρ, ρ', ρ'' les demi-dimensions de la cellule ou noyau primitif du cristal, une particule pondérable aura pour coordonnées

$$x_1 = k\rho, \quad y_1 = k'\rho', \quad z_1 = k''\rho'',$$

k, k', k'' étant des nombres impairs pouvant prendre toutes les valeurs positives ou négatives.

ρ_1 étant la distance d'une particule pondérable à l'origine, on aura

$$\rho_1^2 = K^2\rho^2 + K'^2\rho'^2 + K''^2\rho''^2.$$

Nous nous proposons de comparer entre eux les indices, ce qui revient, d'après les formules (20), à comparer entre elles les trois quantités φ,

(1) Voir même Tome, p. 147.

β, γ, définies par les relations (17) que l'on peut mettre sous la forme

$$\alpha(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$\beta(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$\gamma(1+g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1),$$

$1+g_1$ étant un nombre positif que l'on calcule au moyen de la formule (21).

On tire des précédentes

$$(\beta-\alpha)(1+g_1) = \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1),$$
$$(\gamma-\alpha)(1+g_1) = \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1):$$

on est donc conduit à comparer entre eux les trois coefficients

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 z_1^2 \psi(\rho_1).$$

Prenons, par exemple, les deux premiers. Leur différence

$$(22) \qquad \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1)$$

est nulle lorsque $\rho = \rho'$, c'est-à-dire lorsque tous les réseaux du cristal situés dans des plans parallèles au plan xoy sont à mailles carrées : c'est le cas du prisme droit à base carrée. Nous allons prouver qu'elle ne peut s'annuler que dans ce cas.

A cet effet, nous allons considérer d'abord un réseau plan, c'est-à-dire que nous ferons $\rho'' = 0$. Un point du réseau aura, pour coordonnées,

$$x_1 = K\rho, \quad y_1 = K'\rho',$$

et l'on aura $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$. Les axes de coordonnées étant dirigés parallèlement aux lignes du réseau, et l'origine étant prise au centre d'une maille.

Si l'on pose $2a^2 = \rho^2 + \rho'^2$, puis $\dfrac{\rho'}{\rho} = \tang\theta$, on aura

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,$$

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

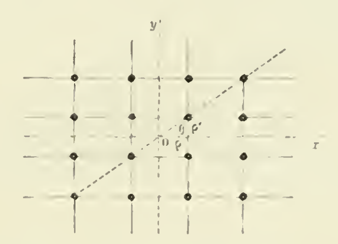
Nous poserons $\lambda = \cos 2\zeta$. On aura

$$\rho_1^2 = 2K^2a^2\cos^2\zeta + 2K'^2a^2\sin^2\zeta = K^2a^2(1+\lambda) + K'^2a^2(1-\lambda).$$

La différence considérée devient

$$(1+\lambda)\Sigma_1 m_1 a^2 K^2 \psi(\rho_1) - (1-\lambda)\Sigma_1 m_1 K'^2 a^2 \psi(\rho_1).$$

Posons $x = Ka$, $y = K'a$, x et y seront les coordonnées d'un point d'un réseau à mailles carrées dont la demi-dimension d'une maille



serait a. Les Σ se rapporteront maintenant à ce réseau; or on peut y faire tourner à volonté les axes, si on les fait tourner de 45°, c'est-à-dire si l'on remplace

$$x \text{ par } \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y \text{ par } \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

on aura simplement

$$-\Sigma_1 m_1 2xy\psi(\rho_1) + \lambda\Sigma_1 m_1(x^2+y^2)\psi(\rho_1)$$

pour la différence considérée, ρ_1 prenant maintenant la valeur

$$\sqrt{x^2+y^2-2\lambda xy}.$$

Faisons, pour abréger, $\sqrt{x^2+y^2}=r$, et observons que l'on a

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda} = -\frac{xy}{\rho_1}$$

et, pour $\lambda = 0$,

$$\left(\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right)_0 = -\frac{xy}{r}.$$

Dans le cas général,

$$\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)}\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}},$$

nous ferons abstraction pour un instant du facteur constant, et nous réduirons $\psi(\rho_1)$ à $\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$; on a alors

$$D_{\rho_1}\psi(\rho_1) = -\frac{n_1+1}{\rho_1^{n_1+2}},$$

$$D_{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\psi\right) = \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{\rho_1^{n_1+4}},$$

$$D_{\rho_1}\left[\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1}D_{\rho_1}\psi\right)\right] = -\frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{\rho_1^{n_1+6}},$$

. . . .

Alors, par la formule de Maclaurin, $\psi(\rho_1)$ se développe en série convergente, savoir :

$$\begin{aligned}\psi(\rho_1) = \frac{1}{r^{n_1+1}} + \frac{(n_1+1)}{r^{n_1+3}}\lambda xy + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\frac{(xy)^2}{r^{n_1+5}} \\ + \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3\frac{(xy)^3}{r^{n_1+7}} + \cdots \\ + \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\frac{(xy)^m}{r^{n_1+2m+1}} + \cdots;\end{aligned}$$

il est aisé de voir que cette série est convergente; le rapport d'un terme au précédent est

$$+\frac{n_1+2m-1}{m}\frac{\lambda xy}{r^2},$$

dont la limite est

$$+\frac{2\lambda xy}{r^2}.$$

Or on a toujours

$$2\lambda xy < x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad 2\lambda xy < r^2,$$

donc

$$\frac{2xy\lambda}{r^2} < 1.$$

On en déduit

$$\sum_1 2xy\psi(\rho_1) = \sum_1 \frac{2xy}{r^{n_1+1}} + 2(n_1+1)\lambda \sum_1 \frac{(xy)^2}{r^{n_1+3}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\, 2\sum_1 \frac{(xy)^3}{r^{n_1+5}}$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3\, 2\sum_1 \frac{(xy)^4}{r^{n_1+7}} + \cdots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\, 2\sum_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} + \cdots$$

Les Σ_1 se rapportent ici à un réseau carré, les sommes qui dépendent d'une puissance impaire de xy sont nulles, et l'on a simplement

$$-\sum_1 m_1 2xy\psi(\rho_1) = -2(n_1+1)\lambda \sum_1 m_1 \frac{(xy)^2}{r^{n_1+3}}$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{1.2.3}\lambda^3\, 2\sum_1 m_1 \frac{(xy)^4}{r^{n_1+7}} - \cdots$$
$$- \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\, 2\sum_1 m_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} - \cdots$$

m étant un nombre impair. De même, on aura

$$\sum_1 m_1 (x^2+y^2)\psi(\rho_1) = \sum_1 m_1 \frac{x^2+y^2}{r^{n_1+1}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2 \sum_1 m_1 \frac{(xy)^2(x^2+y^2)}{r^{n_1+5}}$$
$$+ \frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)(n_1+7)}{1.2.3.4}\lambda^4 \sum_1 m_1 \frac{(xy)^4(x^2+y^2)}{r^{n_1+9}} + \cdots$$
$$+ \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-3)}{1.2.3\ldots(m-1)}\lambda^{m-1} \sum_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1}(x^2+y^2)}{r^{n_1+2m-1}} + \cdots$$

Dans le terme général de chacune de ces séries entrent les coefficients

$$\sum_1 m_1 \frac{(xy)^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} \quad \text{et} \quad \sum_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1}(x^2+y^2)}{r^{n_1+2m-1}};$$

il s'agit de les calculer. m étant impair, nous ferons

$$m = 2p + 1.$$

Dans un réseau à mailles carrées, ces Σ_1 restent invariables quand on fait tourner les axes. Faisons $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$: on a

$$\sum_1 m_1 \frac{(xy)^{2p+2}}{r^{n_1+4p+3}} = \sum_1 m_1 \frac{r^{4p+4}}{r^{n_1+4p+3}}(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2} = \sum_1 m_1 \frac{(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2}}{r^{n_1-1}};$$

or faire tourner les axes revient à faire varier ω. Si l'on imagine qu'on lui donne toutes les valeurs possibles de 0 à 2π en le faisant varier par degrés infiniment petits, puis que l'on prenne la moyenne, on aura justement la valeur de la somme considérée : donc elle est

$$\sum_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2}\,d\omega.$$

Or l'intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{2p+2}}\int_0^{2\pi}(\sin 2\omega)^{2p+2}\,d\omega.$$

D'autre part, on a, quel que soit l'arc U et q étant pair,

$$\begin{aligned} 2^{q-1}(-1)^{\frac{q}{2}}(\sin 2\mathrm{U})^q = \cos 2q\mathrm{U} &- \frac{q}{1}\cos 2(q-2)\mathrm{U} \\ &+ \frac{q(q-1)}{1.2}\cos 2(q-4)\mathrm{U} + \ldots \\ &+ (-1)^{\frac{q}{2}}\frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\,\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin 2\mathrm{U})^q\,d\mathrm{U} = \frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\,\frac{1}{2^q}:$$

donc le coefficient considéré est ici

$$\frac{(2p+2)(2p+1)2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p+1)}\,\frac{1}{2^{4p+4}}\sum_1 m_1\frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

On a de même

$$\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{m-1}r^2}{r^{n_1+2m-1}} = \sum\nolimits_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}(\sin\omega\cos\omega)^{m-1}$$
$$= \sum\nolimits_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^p} \int_0^{2\pi} (\sin 2\omega)^{2p}\, d\omega$$

ou

$$\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p} \frac{1}{2^{4p}} \sum\nolimits_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

Le terme général de la valeur de $-\Sigma 2xy\psi(\rho_1)$ est donc

$$-\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p+1)}{1.2.3\ldots(2p+1)}\lambda^{2p+1}$$
$$\times \frac{(2p+2)(2p+1)2p\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p+1)} \frac{1}{2^{4p+3}} \sum\nolimits_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}},$$

et, dans la valeur de $\lambda\Sigma_1 m_1(x^2+y^2)\psi(\rho_1)$,

$$+\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots 2p}\lambda^{2p+1}\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p}\frac{1}{2^{4p}}\sum\nolimits_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}.$$

Donc, dans la valeur de

$$-\Sigma_1 m_1 2xy\psi(\rho_1) + \lambda\Sigma_1 m_1(x^2+y^2)\psi(\rho_1),$$

le terme général sera

$$\lambda^{2p+1}\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots 2p}$$
$$\times\frac{2p(2p-1)\ldots(p+3)(p+2)}{1.2.3\ldots p}\left[\frac{p+1}{2^{4p}} - \frac{(n_1+4p+1)(2p+2)(2p+1)}{(2p+1)(p+1)2^{4p+3}}\right]$$

ou, toutes réductions faites,

$$\frac{\lambda^{2p+1}}{2^{4p+2}}\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)(3-n_1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p}\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}};$$

donc la différence considérée est

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\mu_1 \lambda}{(n_1-4)(g+3h)}\,\frac{3-n_1}{4}\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \\ & \quad \times \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=+\infty} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p}\,\frac{\lambda^{2p}}{2^{4p}}, \end{aligned} \right.$$

le coefficient numérique, sous le signe S, étant fait égal à 1 pour $p=0$.

Le calcul précédent se rapporte à un réseau plan idéal qui, dans le corps, coïnciderait avec le plan xoy; or, dans le corps, aucun n'occupe cette position, puisque l'origine est prise au centre d'une cellule. La moindre distance de l'origine d'un des réseaux parallèles au plan xoy est ρ''; généralement la distance est $K''\rho''$, K'' étant un nombre impair positif ou négatif. Nous la désignons par z_1.

La supposition $\rho''=0$, ou $z_1=0$ permettait de ramener tous les Σ_1 à une seule, savoir :

$$\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}};$$

il n'en est plus ainsi si z_1 n'est pas nul; alors, si l'on fait toujours

$$r^2 = x^2+y^2 \quad \text{et} \quad \iota^2 = x^2+y^2+z_1^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{2p+2}}{\iota^{n_1+4p+3}} &= \sum\nolimits_1 m_1 \frac{r^{4p+4}}{\iota^{n_1+4p+3}}(\sin\omega\cos\omega)^{2p+2} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1).2p\ldots(p+2)}{1.2.3\ldots(p+1)}\,\frac{1}{2^{4p+4}}\sum\nolimits_1 m_1 \frac{r^{4p+4}}{\iota^{n_1+4p+3}} \end{aligned}$$

et de même

$$\sum\nolimits_1 m_1 \frac{(xy)^{2p} r^2}{\iota^{n_1+4p+1}} = \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p}\,\frac{1}{2^{4p}}\sum\nolimits_1 m_1 \frac{r^{4p+2}}{\iota^{n_1+4p+1}}.$$

Comme on peut répéter les mêmes calculs pour chacun des réseaux et qu'il suffit d'ajouter les résultats pour avoir la valeur de notre expression relative à tout le corps, il suffit d'imaginer que Σ_1 se rapporte

en effet à tout le corps; on a ainsi, pour le terme général,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda^{2p-1}}{2^{4p+2}}\,\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+4p-1)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p}\\ &\quad\times\left[(4p+1)\sum_1 m_1\frac{r^{4p+4}}{\rho_1^{n_1+4p+3}}-(n_1+4p+1)\sum_1 m_1\frac{r^{4p+2}}{\rho_1^{n_1+4p+1}}\right];\end{aligned}\right.$$

la parenthèse peut s'écrire

$$\sum_1 m_1\frac{r^{4p+2}}{\rho_1^{n_1+4p+1}}\left[(4p+1)\frac{r^2}{\rho^2}-(n_1+4p+1)\right].$$

Si $n_1 \geq 3$, on voit que, r étant inférieur à ρ, tous les termes auront le même signe quel que soit p, d'où il résulte que l'expression (23) ne peut s'annuler que pour $\lambda = 0$.

Examinons le cas de $n_1 < 3$, c'est-à-dire 1 ou 2. Reprenons l'expression considérée sous sa première forme, savoir :

$$(22)\qquad \Sigma_1 m_1 x_1^2\psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 y_1^2\psi(\rho_1),$$

avec $\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1}{(n_1+4)(g+3h)}\,\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$. Ne prenons dans la somme que les termes qui se rapportent à un réseau dont la distance à l'origine est z_1. La dérivée de notre expression prise par rapport à z_1^2 est, abstraction faite de tout facteur constant,

$$\sum_1 m_1\frac{x_1^2}{\rho_1^{n_1+3}} - \sum_1 m_1\frac{y_1^2}{\rho_1^{n_1+3}},$$

de même forme que la proposée, et où n_1 est remplacé par $n_1 + 2$. D'après ce qui précède, cette dérivée ne pourra s'annuler que pour $\lambda = 0$, puisque ici le nombre n_1 entrant dans (24) est au moins 3. Si, dans (22), on fait $z_1 = 0$, elle se réduit à (23) et a un signe déterminé pour un signe donné de λ; lorsque z_1 croît, elle varie toujours dans le même sens, puisque sa dérivée conserve un signe invariable, et, pour $z_1 = \infty$, ρ_1 devenant infini, l'expression (22) s'annule; il en résulte que, pour toute valeur finie de z_1, elle garde un signe invariable, le même que pour $z_1 = 0$. Il en est de même pour la somme étendue à tous les réseaux.

Un artifice analogue peut être employé pour $n_1 = 4$ que nous avions négligé. Pour $n_1 = 4$,

$$\psi(\rho_1) = \frac{-\mu_1 L \rho_1}{(g+3h)\rho_1^5};$$

or on remarque que cette valeur se déduit simplement de la valeur générale en la mettant sous la forme

$$\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1 \rho_1^{-n_1-1}}{g+3h(n_1-4)},$$

prenant le rapport des dérivées par rapport à n_1 et faisant $n_1 = 4$. Dans (23) qui subsiste quelque voisin que n_1 soit de 4, on aura donc à la limite, en opérant de la même manière :

$$\frac{\mu_1 \lambda}{4(g+3h)} \sum_1 m_1 \frac{Lr}{r^3} \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=\infty} \frac{5.6\ldots(4p+3)}{1.2.3\ldots(p+1).1.2.3\ldots p} \frac{\lambda^{2p}}{2^{4p}},$$

dont le signe reste invariable avec celui de λ. On en conclut encore, comme dans le cas général, que (22) ne peut pas s'annuler et changer de signe tant que λ conserve son signe, c'est-à-dire tant que la différence $\rho - \rho'$ conserve le même signe. Si l'on avait $n_1 = 3$, l'expression (23) serait nulle, quel que fût λ pour $z_1 = 0$; en vertu du raisonnement précédent, elle le serait toujours, quel que fût z_1; or cela est impossible en vertu de (24) : donc il faut rejeter la supposition $n_1 = 3$. Dans le cas général, notre raisonnement prouve encore que (22) a le signe de $\frac{3-n_1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h}\lambda$ si $n_1 \neq 4$, et de $-\frac{\mu_1 \lambda}{g+3h}$ si $n_1 = 4$.

Ainsi il est démontré par ce qui précède que la différence $\beta - \alpha$ conservera un signe invariable tant que la différence $\rho - \rho'$ ne changera pas de signe et même qu'elle changera de signe avec elle.

De même pour $\gamma - \alpha$ et $\rho - \rho''$.

Il suffit donc de savoir comment les signes se correspondent lorsque $\rho - \rho'$ et $\rho - \rho''$ sont aussi petites que l'on veut.

Nous poserons

$$\rho = \rho' - \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho' = \rho + \varepsilon,$$

$$\rho = \rho'' - \varepsilon' \quad \text{ou} \quad \rho'' = \rho + \varepsilon',$$

ε et ε' étant infiniment petits et positifs.

Lorsque $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, $\rho = \rho' = \rho''$, c'est le cas du cube, on a

$$\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) z_1^2.$$

Les coordonnées d'une particule dans un cube dont une cellule a pour dimension 2ρ étant

$$x_1 = K\rho,$$
$$y_1 = K'\rho,$$
$$z_1 = K''\rho.$$

Remplaçons y, ρ par $\rho + \varepsilon$ dans y_1; ρ par $\rho + \varepsilon'$ dans z_1.

Cela revient à faire varier

$$y_1 \text{ de } K'\varepsilon \quad \text{ou} \quad y_1 \frac{\varepsilon}{\rho},$$

$$z_1 \text{ de } K''\varepsilon' \quad \text{ou} \quad z_1 \frac{\varepsilon'}{\rho};$$

donc, en choisissant ∂ pour signe de ces variations, on aura

$$\partial x_1 = 0, \quad \partial y_1 = y_1 \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad \partial z_1 = z_1 \frac{\varepsilon'}{\rho}.$$

Alors

$$\partial \rho_1 = \frac{y_1 \, \partial y_1 + z_1 \, \partial z_1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho \rho_1},$$

par suite

$$\partial \sum\nolimits_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \sum\nolimits_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{x_1^2}{\rho_1} \left(\frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho} \right),$$

$$\partial \sum\nolimits_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 = \sum\nolimits_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{y_1^2}{\rho_1} \left(\frac{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon' z_1^2}{\rho} \right) + 2 \sum\nolimits_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

La différence $\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 - \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2$, qui était nulle, devient donc

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \left[\sum\nolimits_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{x_1^2 y_1^2}{\rho_1} - \sum\nolimits_1 m_1 \psi'(\rho_1) \frac{y_1^4}{\rho_1} - 2 \sum\nolimits_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 \right]$$
$$+ \frac{\varepsilon'}{\rho} \sum\nolimits_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} z_1^2 (x_1^2 - y_1^2);$$

mais actuellement les Σ se rapportent au cube : donc le terme en ε' disparait; d'autre part, si $n_1 \neq 4$, on a

$$\psi(\rho_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{\rho_1^{n_1+1}},$$

$$\psi'(\rho_1) = \frac{-(n_1+1)\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{\rho_1^{n_1+2}},$$

puis

$$\sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} x_1^2 y_1^2 = \frac{1}{3.5} \sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} \rho_1^4 = -\frac{1}{3.5} \frac{n_1+1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

$$\sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} y_1^4 = \frac{1}{5} \sum_1 m_1 \frac{\psi'(\rho_1)}{\rho_1} \rho_1^4 = -\frac{1}{5} \frac{n_1+1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

$$\sum_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2 = \frac{1}{3} \sum_1 m_1 \psi(\rho_1) \rho_1^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{n_1-4} \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}}.$$

Donc, si l'on pose

$$p = \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

la difference considérée devient

$$\frac{p\varepsilon}{\rho}\left(-\frac{1}{3.5} \frac{n_1+1}{n_1-4} + \frac{1}{5} \frac{n_1+1}{n_1-4} - \frac{2}{3} \frac{1}{n_1-4}\right)$$

ou

$$\frac{1}{3.5} \frac{p\varepsilon}{\rho} \frac{2n_1-8}{n_1-4}$$

ou enfin

$$\frac{2p\varepsilon}{3.5.\rho},$$

donc $\beta - \alpha$ a toujours le signe de $p\varepsilon$.

De même $\gamma - \alpha$ a toujours le signe de $p\varepsilon'$.

Si $n_1 = 4$, le même calcul conduit à la même conséquence; dans ce cas, $p = \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^3}$, il suffit de faire $n_1 = 4$ dans sa valeur générale, parce que $n_1 - 4$ n'y entre plus au dénominateur. On voit de même que $\beta - \gamma$ aura le signe de $p(\varepsilon - \varepsilon')$.

Soit donc

$$\rho < \rho' < \rho'' \quad \text{ou} \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon' > \varepsilon.$$

Si $p < 0$, on aura

$$\alpha > \beta > \gamma$$

et, par suite,

$$\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 :$$

à la plus petite dimension correspond le plus grand indice, à la plus grande le plus petit.

C'est l'inverse si $p > 0$.

La comparaison du calcul aux données expérimentales va nous permettre de choisir entre ces deux lois.

IX. — Prisme droit à base carrée.

Désignons l'axe des z suivant la hauteur, alors $\rho = \rho'$: donc

$$\Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) x_1^2 = \Sigma_1 m_1 \psi(\rho_1) y_1^2$$

ou

$$\alpha = \beta,$$

par suite

$$\nu_1 = \nu_2.$$

L'indice ordinaire est la valeur commune de ces deux indices, le troisième ν_3 est l'indice extraordinaire. On a

$$\frac{1}{\nu_o^2} = \frac{1-\alpha}{(1+g_1)^3},$$

$$\frac{1}{\nu_e^2} = \frac{1-\gamma}{(1+g_1)^3};$$

à cause de $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a

$$\gamma = -2\alpha,$$

donc

$$\frac{\nu_o^2}{\nu_e^2} = \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = f,$$

on en tirera

$$2\alpha = \frac{f^2 - 1}{f^2 + 2}.$$

Cette formule permet de calculer α, et par suite γ.

L'expérience prouve que les cristaux de ce système se partagent en deux catégories, savoir :

Les cristaux répulsifs, où $\nu_o > \nu_e$ ou $f > 1$.

Les cristaux attractifs, où $\nu_o < \nu_e$ ou $f < 1$.

Dans les premiers $\alpha > 0$, $\gamma = -2\alpha$ est négatif; donc

$$\gamma - \alpha \quad \text{ou} \quad -3\alpha < 0.$$

Parmi les cristaux répulsifs de ce système, on peut citer :

Le mellite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{2}{3}$;

Le molybdate de plomb pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{5}{11}$;

L'octaédrite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{35}{93}$,

et, parmi les cristaux attractifs :

Le zircon pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{10}{9}$;

La stannite pour lequel $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{3}{2}$.

J'emprunte ces nombres à l'ouvrage de Dufrénoy.

Donc, pour les cristaux répulsifs où l'on a

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' > 0.$$

On doit aussi avoir -3α ou $p\varepsilon'$ négatif; il en résulte

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_1}{g + 3h} < 0$$

et, pour les cristaux attractifs,

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' < 0, \quad p\varepsilon' > 0;$$

donc encore

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_1}{g+3h} < 0,$$

donc $\mu_1 < 0$ si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales, c'est-à-dire si $g + 3h > 0$.

On peut encore en tirer une autre conséquence. On a vu dans le numéro précédent que $\beta - \alpha$ a le signe de

$$(22) \qquad \frac{3-n_1}{n_1-4}\,\frac{\mu_1}{g+3h}\,\lambda,$$

où $\lambda = \cos 2\vartheta$ et $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\rho'}{\rho}$.

De la même manière $\gamma - \alpha$ aura le signe de cette expression où l'on fait maintenant $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\rho''}{\rho}$.

Or, pour $\rho'' > \rho$, d'où $\vartheta > 45°$ ou $\lambda < 0$, on doit avoir $\gamma - \alpha < 0$; comme $\frac{\mu_1}{g+3h}$ est négatif, on en conclut

$$\frac{3-n_1}{4-n_1} > 0.$$

Donc, si $n_1 \neq 4$, il est ou inférieur à 3, c'est-à-dire 2 ou 1, ou supérieur à 4. Nous avons déjà observé (n° 6) que la valeur 1 devrait être rejetée et que la valeur 2 était peu probable : donc il y a lieu de penser que $n_1 = 4$.

Si $n_1 = 4$, $\gamma - \alpha$ a le signe de

$$(23) \qquad \frac{-\lambda\mu_1}{g+3h}$$

pour $\rho'' > \rho$, $\lambda < 0$; donc on a le signe de $\frac{\mu_1}{g+3h}$, qui est bien négative, comme cela doit être. A la vérité, l'idocrase pour lequel on admet $\frac{\rho}{\rho''} = \frac{4}{3}$ (Beudant) et qui est répulsif semble faire exception, mais les raisons de simplicité qui font admettre ce rapport, et qui sont tirées de la considération des modifications sur les arêtes de la base, conduiraient tout aussi bien au rapport simple $\frac{2}{4}$ conforme à la théorie.

et il est à remarquer que ce cristal se présente le plus souvent sous une forme allongée dans le sens de la hauteur.

La loi que donne le calcul n'ayant *jamais été soupçonnée par les observateurs*, ils ne s'en sont pas aidés dans les cas douteux, et peut-être faut-il voir dans l'idocrase un premier exemple de l'usage que l'on peut faire de cette loi pour la détermination plus exacte de la forme primitive d'un cristal appartenant au système du prisme droit, à base carrée.

Pour les prismes droits à base rectangle, ou rhombe, ou parallélogramme, qui admettent deux axes optiques, on pourrait encore tirer une vérification du calcul au moyen de l'angle des axes

Si l'on considère un ellipsoïde dont les axes seraient dirigés suivant les trois axes principaux, et dont les longueurs seraient $\frac{1}{\nu_1}$, $\frac{1}{\nu_2}$, $\frac{1}{\nu_3}$, on aura les axes optiques en prenant les diamètres conjugués aux sections circulaires de cet ellipsoïde; il en résulte que dans un prisme droit à base rectangle les axes doivent être dans un plan perpendiculaire à la dimension moyenne.

On trouvera sans peine que le demi-angle des axes optiques, c'est-à-dire l'angle que fait l'un deux avec l'axe des x correspondant à la dimension ρ, est donné par la formule

$$\text{tang}^2 \text{I} = \frac{(\beta - \alpha)(1 - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)(1 - 2\alpha)};$$

la différence $\text{tang}^2 \text{I} - 1$ a le signe de $(\alpha - \gamma)(1 - 2\beta)$, c'est-à-dire de $\alpha - \gamma$. Or, si $\rho < \rho' < \rho''$, comme p ou $\frac{\mu_1}{g + 3h} < 0$, on a

$$\alpha > \beta > \gamma.$$

Donc $\alpha - \gamma > 0$, $\text{I} > 45°$: il en résulte que c'est l'*axe principal correspondant à la plus grande des trois dimensions qui est la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques.*

Les ouvrages spéciaux donnent bien pour certaines substances la valeur de I; mais, sans indiquer comment les axes optiques sont disposés par rapport aux arêtes du cristal, je ne puis donc pas vérifier cette

conséquence du calcul. Si elle est trouvée exacte sur les corps dont la forme primitive sera non douteuse, elle permettra de la fixer dans les cas douteux.

Je vais maintenant appliquer le calcul aux rhomboèdres qui nous fournissent des résultats comparables aux faits observés et complètement d'accord avec eux.

X. — Rhomboèdre.

Les cristaux appartenant au système du rhomboèdre jouissent de la double réfraction uniaxiale qui devient simple dans le cas particulier du cube; ils se partagent aussi en cristaux répulsifs et en cristaux attractifs, et ont été l'objet de travaux particuliers de Mitscherlich et de M. Fizeau. Nous prendrons pour axe des z l'axe du cristal, ou plutôt l'axe de la cellule qui est un rhomboèdre, et pour axe des x et des y deux axes rectangulaires quelconques dans un plan perpendiculaire au premier, mené par le centre de la cellule. Les lignes du cristal sont parallèles aux arêtes du rhomboèdre, elles forment le même angle θ avec l'axe et entre elles le même angle. Leurs projections sur xoy forment avec ox des angles

$$\omega, \quad \omega + \frac{2\pi}{3}, \quad \omega + \frac{4\pi}{3}.$$

Si l'on désigne par

$$a, \; b, \; c,$$
$$a', \; b', \; c',$$
$$a'', \; b'', \; c''$$

leurs cosinus directeurs, on aura

$$\begin{aligned}
a &= \sin\theta\cos\omega, & a' &= \sin\theta\cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), & a'' &= \sin\theta\cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),\\
b &= \sin\theta\sin\omega, & b' &= \sin\theta\sin\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), & b'' &= \sin\theta\sin\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),\\
c &= \cos\theta, & c' &= \cos\theta, & c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Nous prendrons trois nouveaux axes de coordonnées, parallèles aux

arêtes du trièdre au sommet, c'est-à-dire aux lignes du cristal, et menés par l'origine; les formules de transformation seront

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = cx' + c'y' + c''z'.$$

Nous allons d'abord faire voir que les coefficients

$$\Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 x_1 z_1 \psi(\rho_1), \quad \Sigma_1 m_1 y_1 z_1 \psi(\rho_1)$$

sont bien nuls. Si l'on désigne par x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées, dans le nouveau système d'axes de la particule x_1, y_1, z_1, on a

$$x_1 y_1 = ab x_1'^2 + a'b' y_1'^2 + a''b'' z_1'^2 + (ab' + ba') x'_1 y'_1 + (ab'' + ba'') x'_1 z'_1 + (a'b'' + b'a'') y'_1 z'_1.$$

Les particules sont également espacées sur chacune des trois lignes, et rien n'est changé si l'on échange entre eux les trois axes $o'x$, $o'y$, oz', ce qui revient à faire tourner le cristal de $\frac{2\pi}{3}$ autour de son axe optique. Donc

$$\Sigma_1 m_1 x_1'^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 y_1'^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 z_1'^2 \psi(\rho_1),$$
$$\Sigma_1 m_1 x'_1 y'_1 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 x'_1 z'_1 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 y'_1 z'_1 \psi(\rho_1);$$

d'où

$$\Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1) = (ab + a'b' + a''b'') \Sigma_1 m_1 x_1'^2 \psi(\rho_1) + (ab' + ba' + ab'' + ba'' + a'b'' + b'a'') \Sigma_1 m_1 x'_1 y'_1 \psi(\rho_1).$$

Or

$$ab + a'b' + a''b'' = \sin^2\theta \left[\cos\omega \sin\omega + \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta \left[\sin 2\omega + \sin\left(2\omega + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(2\omega + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 0;$$

de même

$$ab' + ba' + ab'' + ba'' + a'b'' + b'a''$$
$$= \sin^2\theta\left[\sin\left(2\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2\omega + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin 2\omega\right] = 0.$$

Donc $\Sigma_1 m_1 x_1 y_1 \psi(\rho_1)$ est identiquement nul et de même les deux autres. Nous sommes bien dans le cas où les formules du n° **7** sont applicables.

Il est facile de vérifier de la même manière que

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 y_1^2 \psi(\rho_1).$$

D'où il résulte que la double réfraction est uniaxiale, comme pour un prisme droit à base carrée.

Pour connaître la relation de grandeur entre les deux indices ordinaire et extraordinaire, il suffit, d'après ce qui a été dit au n° **9**, de connaître le signe de α. Or on a toujours [§ VII, éq. (17)]

$$\alpha(1 + g_1) = \tfrac{1}{3}\Sigma_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) - \Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1)$$

avec

$$\alpha = \beta = -\frac{\gamma}{2}.$$

Prenons pour nouveaux axes ceux que l'on a déjà définis. Soit V l'angle qu'ils font entre eux et qui n'est autre chose que l'angle de la face au sommet du rhomboèdre; désignons par λ le cosinus de cet angle, on a

$$\rho_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + 2\lambda(x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1');$$

donc

$$\Sigma_1 m_1 \rho_1^2 \psi(\rho_1) = \Sigma_1 m_1 (x_2'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\psi(\rho_1)$$
$$+ 2\lambda \Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\psi(\rho_1);$$

puis

$$x_1'^2 = a^2 x_1^2 + a'^2 y_1^2 + a''^2 z_1^2 + 2aa' x_1 y_1 + 2aa'' x_1 z_1 + 2a'a'' y_1 z_1;$$

par suite

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \tfrac{1}{3}(a^2 + a'^2 + a''^2)\,\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1)$$
$$+ \tfrac{2}{3}(aa' + aa'' + a'a'')\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1);$$

or

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \tfrac{3}{2}\sin^2\vartheta,$$

$$2(aa' + aa'' + a'a'') = -\tfrac{3}{2}\sin^2\vartheta,$$

et enfin

$$\cos V \quad \text{ou} \quad \lambda = aa' + bb' + c'c' = 1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\vartheta.$$

Donc

$$\Sigma_1 m_1 x_1^2 \psi(\rho_1) = \tfrac{1}{3}(1 - \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1)$$
$$- \tfrac{1}{3}(1 - \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1).$$

Il en résulte

$$(25)\quad \begin{cases} 3\alpha(1 + g_1) = \lambda\,\Sigma_1 m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\psi(\rho_1) \\ \qquad + (1 + \lambda)\,\Sigma_1 m_1 (x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1')\,\psi(\rho_1). \end{cases}$$

Nous allons développer le second membre en série convergente suivant les puissances de λ, en considérant d'abord le cas où λ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$ et plus particulièrement lorsqu'il est négatif.

Nous ferons

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = r^2,$$

$$x_1' y_1' + x_1' z_1' + y_1' z_1' = \xi.$$

Pour effectuer le développement par la formule de Maclaurin, il faut faire $\lambda = 0$ dans tous les termes du développement; les Σ_1 qui y entreront devront donc être considérées comme se rapportant à un cristal cubique pour lequel la demi-dimension d'une cellule serait égale à la demi-arête de la cellule rhomboédrique.

On a

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda} = \frac{\xi}{\rho_1},$$

et pour $\lambda = 0$,

$$\left(\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right)_0 = \frac{\xi}{r}.$$

Prenons d'abord le cas général où $n_1 \neq 4$, et faisons abstraction pour un instant du facteur $\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}$; alors $\psi(\rho_1)$ se réduira à $\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}}$, et l'on aura

$$\frac{1}{\rho_1^{n_1+1}} = \frac{1}{r^{n_1+1}} - \frac{n_1+1}{r^{n_1+3}}\lambda\xi + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\frac{\xi^2}{r^{n_1+5}} - \dots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m+1}} + \dots$$

Cette série est convergente. En effet, puisque par hypothèse λ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$, V est compris entre 60° et 120°; il en est de même de son supplément; on peut donc construire un trièdre dont les trois faces auront même valeur 180° — V. Prenons les arêtes de ce trièdre pour axes de coordonnées et imaginons un point qui aurait pour coordonnées dans le système x'_1, y'_1, z'_1. Le carré de la distance de ce point au sommet, lequel est toujours positif, aurait pour valeur

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 - 2\lambda(x'_1 y'_1 + x'_1 z'_1 + y'_1 z'_1),$$

donc

$$r^2 - 2\lambda\xi > 0;$$

d'autre part, on a aussi

$$\rho_1^2 = r^2 + 2\lambda\xi$$

et, par suite,

$$r^2 + 2\lambda\xi > 0.$$

Donc, dans tous les cas, on a

$$\frac{2\lambda\xi}{r^2} < 1$$

en valeur absolue.

Or, le rapport d'un terme au précédent dans la série considérée a visiblement pour limite $-\frac{2\lambda\xi}{r^2}$; il est donc toujours inférieur à 1 en valeur absolue, et la série est bien convergente.

Actuellement, on a

$$\Sigma_1 m_1(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)\psi(\rho_1)$$
$$= \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} - (n_1+1)\lambda\Sigma_1 m_1 \frac{\xi}{r^{n_1+1}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2\Sigma_1 m_1\frac{\xi^2}{r^{n_1+3}} - \dots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} + \dots,$$

et de même

$$\Sigma_1 m_1 (x'_1 y'_1 + x'_1 z'_1 + y'_1 z'_1) \psi(\rho_1)$$

$$= \Sigma_1 m_1 \frac{\xi}{r^{n_1+1}} - (n_1+1)\lambda \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^2}{r^{n_1+3}} + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{1.2}\lambda^2 \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^3}{r^{n_1+5}} - \dots$$

$$+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\dots(n_1+2m-1)}{1.2.3\dots m}\lambda^m \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} + \dots$$

Nous sommes conduits à calculer les sommes, telles que

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}},$$

Σ_1 se rapportant à un cube, comme on l'a observé. Or, dans un cube, la valeur d'une pareille somme est indépendante de la direction des axes. Prenons pour nouvel axe des z la droite menée par l'origine et également inclinée sur les directions positives des trois axes ox', oy', oz', lesquels sont censés ramenés maintenant à être rectangulaires, et dans le plan perpendiculaire à cette droite menée par l'origine prenons deux axes quelconques. Ces axes étant désignés par ox, oy, oz, on voit que z n'est autre chose que la distance du point x'_1, y'_1, z'_1 au plan précédemment défini et dont l'équation dans le premier système est

$$x' + y' + z' = 0;$$

on a donc

$$z^2 = \frac{(x'_1 + y'_1 + z'_1)^2}{3} = \tfrac{1}{3}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) + \tfrac{2}{3}(x'_1 y'_1 + x'_1 z'_1 + y'_1 z'_1),$$

ou

$$3z^2 = r^2 + 2\xi.$$

Si maintenant on désigne par θ' l'angle que fait avec oz la droite qui joint l'origine au point x'_1, y'_1, z'_1, on a

$$z = r\cos\theta'$$

et, par suite,

$$2\xi = (3\cos^2\theta' - 1) r^2.$$

Désignons, en outre, par ω' l'angle que fait avec ox la projection de cette même droite sur le plan xoy. Si l'on imagine que l'on fasse tourner les axes ox', oy', oz' ou, si l'on veut, les axes ox, oy, oz de toutes les manières possibles autour de l'origine, ce qui revient à donner à ω' et à θ' toutes les valeurs possibles et variant par degrés aussi petits que l'on veut, puis que l'on prenne la moyenne des valeurs de Σ_1 ainsi obtenues, on aura justement la valeur de Σ_1, puisqu'elle est restée invariable dans ces changements (CAUCHY, *Exercices*). Nous nous bornerons à faire varier ω' de zéro à 2π et θ' de zéro à $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit pour que $\cos^2\theta'$ prenne toutes les valeurs possibles. On a ainsi

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} = \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right)^m \sin\theta'\, d\theta'$$

$$= \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right)^m \sin\theta'\, d\theta'$$

ou, si l'on fait $\cos\theta' = u$,

$$\Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} = \sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}} \frac{1}{2^m} \int_0^1 (3u^2 - 1)^m\, du.$$

En développant $(3u^2 - 1)^m$, il serait facile d'avoir la valeur de l'intégrale, mais il est préférable d'opérer de la manière suivante.

Faisons

$$X_m = \frac{1}{2^m} \int_0^1 (3u^2 - 1)^m\, du.$$

L'intégration par parties donne

$$\int (3u^2 - 1)^m du = u(3u^2 - 1)^m - 6m \int u^2 (3u^2 - 1)^{m-1} du$$
$$= u(3u^2 - 1)^m - 2m \int (3u^2 - 1)^m du$$
$$- 2m \int (3u^2 - 1)^{m-1} du;$$

d'où

$$\int_0^1 (3u^2 - 1)^m du = 2^m - 2m \int_0^1 (3u^2 - 1)^m du - 2m \int_0^1 (3u^2 - 1)^{m-1} du.$$

Divisons par 2^m, nous aurons

$$(26)\qquad (1+2m)X_m + mX_{m-1} = 1.$$

Pour $m = 0$, on a

$$X_0 = \int_0^1 du = 1.$$

Pour $m = 1$,

$$3X_1 + X_0 = 1, \quad \text{d'où} \quad X_1 = 0.$$

L'équation précédente, qui peut être considérée comme une équation aux différences finies, est analogue à l'équation différentielle linéaire et peut aussi se résoudre par un procédé analogue.

Posons

$$X_m = K_m X'_m.$$

Avec les conditions

$$K_1 = 0, \quad X'_1 = \tfrac{1}{3},$$

l'équation (26) devient

$$(27)\qquad (1+2m)K_m X'_m + mK_{m-1}X'_{m-1} = 1.$$

Déterminons X'_m par l'équation

$$(1+2m)X'_m + mX'_{m-1} = 0,$$

d'où

$$X'_m = -\frac{m}{2m+1}X'_{m-1}$$

Si l'on fait successivement $m = 2, 3, \ldots m$, on a

$$X'_2 = -\tfrac{2}{5}X'_1,$$
$$X'_3 = -\tfrac{3}{7}X'_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X'_m = -\frac{m}{2m+1}X'_{m-1},$$

et, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$X'_m = (-1)^{m-1}\frac{2.3.4\ldots m}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

L'équation (27) devient alors

$$(1 + 2m)X'_m(K_m - K_{m-1}) = 1$$

ou

$$K_m - K_{m-1} = \frac{1}{(1+2m)X_m} = (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Donnons maintenant à m les valeurs 2, 3, ..., m, nous aurons

$$K_2 - K_1 = -\frac{3}{2},$$

$$K_3 - K_2 = +\frac{3.5}{2.3},$$

. . . .

$$K_m - K_{m-1} = (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Ajoutons membre à membre, et tenons compte de la condition $K_1 = 0$, nous aurons

$$K_m = -\frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.3} - \frac{3.5.7}{2.3.4} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

La série obtenue en faisant croître m indéfiniment est divergente, parce que le rapport d'un terme au précédent tend vers 2; mais, si l'on forme X_m, on a

$$X_m = (-1)^{m-1}\frac{1.2.3\ldots m}{3.5.7\ldots(2m-1)}K_m,$$

ou

$$X_m = \frac{1}{2m-1}\Big[1 - \frac{m}{2m-1} + \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)} + \ldots + (-1)^m\frac{3.4.5\ldots m}{5.7.9\ldots(2m-1)}\Big],$$

en renversant dans K_m l'ordre des termes. Actuellement, si l'on fait croître m indéfiniment, la série obtenue dans la parenthèse est convergente, car le rapport d'un terme au précédent tend vers $\frac{1}{2}$. Il en résulte que X_m tend vers zéro. De plus, tous les termes de la paren-

thèse allant en décroissant à partir du premier, la parenthèse conserve une valeur positive, et il en est de même de X_m.

La relation (26) permet de trouver la limite de la parenthèse; faisons

$$(2m+1)X_m = S_m,$$

l'équation (26) devient

$$S_m + \frac{m}{2m-1} S_{m-1} = 1;$$

S_m et S_{m-1} étant de même signe et tendant vers une même limite S, on a

$$S + \tfrac{1}{2} S = 1,$$

d'où

$$S = \tfrac{2}{3}.$$

C'est justement la valeur que l'on obtiendrait en remplaçant dans la parenthèse chaque terme par sa limite, ce qui donnerait

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^m \frac{1}{2^m} + \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}.$$

Cela posé, cherchons le terme général du second membre de l'équation (25), il sera

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2\ldots m} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^m}{r^{n_1+2m-1}} \\
&+ (-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m} \lambda^{m+1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+1}}{r^{n_1+2m+1}} \\
&+ (-1)^{m+1} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m+1)}{1.2.3\ldots m(m+1)} \lambda^{m-1} \Sigma_1 m_1 \frac{\xi^{m+2}}{r^{n_1+2m+1}},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2\ldots m} \lambda^{m-1} \Sigma_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}} \\
&\times \left(X_m + X_{m+1} - \frac{n_1+2m+1}{m+1} X_{m+2} \right),
\end{aligned}$$

au facteur près,

$$\frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}.$$

De l'équation (26) on tire

$$(3+2m)X_{m+1}+(m+1)X_m=1,$$
$$(5+2m)X_{m+2}+(m+2)X_{m+1}=1,$$

qui permettent de calculer X_{m+1} et X_{m+2} en fonction de X_m; la parenthèse devient alors, toutes réductions faites,

$$(4-n_1)\frac{(m+2)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Donc, enfin, le terme général de la valeur de $3\alpha(1-g_1)$ devient

$$-(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\frac{\mu_1}{g+3h}$$
$$\times\sum_1\frac{m_1}{r^{n_1-1}}\lambda^{m+1}\frac{(m+2)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Le rapport d'un terme au précédent est donc, en valeur absolue,

$$\frac{n_1+2m-1}{m}\lambda\frac{1+2m}{5+2m}\frac{(m+2)X_m+1}{(m+1)X_{m-1}+1};$$

le dernier facteur peut s'écrire

$$\frac{\frac{m+2}{2m+1}S_m+1}{\frac{m+1}{2m-1}S_{m-1}+1};$$

il a pour limite $\frac{\frac{1}{2}S+1}{\frac{1}{2}S+1}$ ou 1. De même, $\frac{1+2m}{5+2m}$ a pour limite 1, enfin le premier a pour limite 2; donc la limite du rapport considéré est 2λ, lequel est moindre que 1 par hypothèse. Il en résulte que la série est bien convergente.

On a ainsi

(28) $$\left\{\begin{aligned}3\alpha(1+g_1)&=\frac{-\mu_1\lambda}{g+3h}\Sigma_1 m_1\frac{1}{r^{n_1-1}}\\&\times\Big[\frac{1}{5}-\frac{n_1+1}{5.7}\lambda+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.5.7}\lambda^2-\frac{(n_1+1)(n_1+3)(n_1+5)}{2.3.7.11}\lambda^3+\ldots\\&\quad+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{1.2.3\ldots m}\lambda^m\frac{(m+2)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}+\cdots\Big],\end{aligned}\right.$$

Pour $n_1 = 4$, on a immédiatement, suivant une remarque déjà faite,

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{g+3h}\Sigma_1 m_1 \frac{\mathrm{L}r}{r^3}\left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{7} + \frac{\lambda^2}{2} - \ldots\right).$$

La série obtenue n'est convergente que si λ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; cette condition est toujours satisfaite lorsque l'angle V est obtus, c'est-à-dire λ négatif, car l'angle V ne peut pas atteindre 120°, la formule (28) est donc toujours applicable aux rhomboèdres obtus. Dans ce cas tous les termes de la série sont positifs, et α a constamment le signe de $\frac{\mu_1}{g+3h}$. Lorsque V est aigu, c'est-à-dire λ positif, la formule (28) n'est pas toujours applicable, parce que l'angle V peut descendre au-dessous de 60°, et, de plus, même dans les cas où la série resterait convergente, on ne voit pas immédiatement, à moins que λ ne soit très petit, que α conserve un signe invariable, comme nous nous proposons de l'établir. Il faut avoir recours à un autre mode de développement.

D'après ce qui a été dit précédemment, on voit que l'équation (25) peut s'écrire

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\Sigma_1 m_1 \frac{\lambda r^2 + (\lambda+1)\zeta}{\rho_1^{n_1-1}},$$

ρ_1^2 ayant toujours la valeur $r^2 + 2\lambda\zeta$. Si l'on fait, comme on l'a dit, $\zeta = \frac{3\cos^2\theta' - 1}{2} r^2$, puis qu'avant de développer on intègre par rapport à θ', on aura

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)}\sum\nolimits_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + \frac{\lambda+1}{2}(3\cos^2\theta'-1)}{\sqrt{[1+\lambda(3\cos^2\theta'-1)]^{n_1-1}}}\sin\theta'\,d\theta'.$$

C'est de cette dernière intégrale que nous avons formé le développement par rapport aux puissances de λ, dans le cas où 2λ est en valeur absolue moindre que 1. Pour avoir un développement convergent pour toute valeur positive de λ moindre que I, nous procéderons de la manière suivante :

Remplaçons $\cos^2\theta'$ par $\frac{1+\cos 2\theta'}{2}$, il vient

$$1+\lambda(3\cos^2\theta'-1) = \frac{(2+\lambda)+3\lambda\cos 2\theta'}{2} = \frac{2+\lambda}{2}\left(1+\frac{3\lambda}{2+\lambda}\cos 2\theta'\right).$$

Posons $\frac{3\lambda}{2+\lambda}=\varepsilon$, pour toute valeur de λ comprise entre zéro et I, ε est positif et inférieur à I. On a ainsi

$$3\alpha(1+g_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)}\sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1+1}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5\lambda+1)+3(\lambda+1)\cos 2\theta'}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'.$$

On peut maintenant développer $(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{-\frac{n_1+1}{2}}$ en série convergente suivant les puissances de $\varepsilon\cos 2\theta'$; on a

$$(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{-\frac{n_1+1}{2}} = 1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\cos 2\theta'+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2\cdot 4}\varepsilon^2\cos^2 2\theta'-\ldots$$
$$+(-1)^m\frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\varepsilon^m\cos^m 2\theta'+\ldots;$$

on en conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\lambda+1}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'$$
$$= (5\lambda+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta'\,d\theta'-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\varepsilon^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right]$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(\lambda+1)\cos 2\theta'}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta'$$
$$= 3(\lambda+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\varepsilon^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1} 2\theta'\sin\theta'\,d\theta'+\ldots\right].$$

Nous poserons ici

$$X_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m 2\theta' \sin\theta' \, d\theta'$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta' - 1)^m \sin\theta' \, d\theta' = \int_0^1 (2u^2 - 1)^m \, du,$$

en faisant $u = \cos\theta'$.

L'intégration par parties donne la relation

$$(29) \qquad (1 + 2m) X_m + 2m X_{m-1} = 1,$$

avec la condition

$$X_0 = \int_0^1 du = 1, \quad \text{d'où} \quad X_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Si l'on pose, comme on l'a déjà fait,

$$X_m = K_m X'_m,$$

puis

$$(1 + 2m) X'_m + 2m X'_{m-1} = 0,$$

avec les conditions $K_0 = 1$, $X'_0 = 1$, on aura

$$X'_m = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)},$$

puis

$$K_m = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + (-1)^m \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

La série obtenue, en faisant croître m indéfiniment, est ici convergente. En effet, on voit d'abord que les termes vont sans cesse en décroissant, car le rapport d'un terme au précédent est en valeur absolue $\frac{2m-1}{2m}$ ou $1 - \frac{1}{2m}$, toujours inférieur à 1. Comme la série a ses termes alternativement positifs et négatifs, il suffit de montrer que le terme général tend vers zéro. Or on peut toujours prendre un nombre m' fini assez grand pour que

$$1 - \frac{1}{2m'} < e^{-\frac{1}{2m'}}.$$

e étant la base des logarithmes népériens, et *a fortiori* pour tout nombre supérieur à m'. Le terme général peut s'écrire

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m'-2}\right)\left(1-\frac{1}{2m'}\right)\left(1-\frac{1}{2m'+2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Mettons à part

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m'-2}\right).$$

Ce produit a une valeur finie; le produit des autres facteurs est moindre que $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m'+1}+\ldots+\frac{1}{m}\right)}$ qui tend visiblement vers zéro; il en résulte bien que le terme général considéré tend aussi vers zéro, et par suite que K_m tend vers une limite finie et déterminée, lorsque m croît indéfiniment. Cette limite est positive et inférieure à 1.

On a maintenant

$$X_m = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)} K_m$$

ou

$$X_m = (-1)^m\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)K_m.$$

Le même raisonnement prouve que X_m tend vers zéro. Actuellement on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} & \frac{(5\lambda+1)}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta' \\
&= (5\lambda+1)\left[1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon X_1+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2 X_2+\ldots\right. \\
&\qquad\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m X_m+\ldots\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} & \frac{3(\lambda+1)\cos 2\theta}{\sqrt{(1+\varepsilon\cos 2\theta')^{n_1+1}}}\sin\theta'\,d\theta' \\
&= 3(\lambda+1)\left[X_1-\frac{n_1+1}{2}\varepsilon X_2+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2 X_3+\ldots\right. \\
&\qquad\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m X_{m+1}+\ldots\right].
\end{aligned}$$

Comme la série

$$1 + \frac{n_1+1}{2}\varepsilon + \frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4}\varepsilon^2 + \ldots + \frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m + .$$

est convergente, c'est $\sqrt{(1+\varepsilon)^{n_1-1}}$, et que X_m tend vers zéro, les deux séries précédemment obtenues sont aussi convergentes, et quels que soient les signes des termes.

D'autre part, on a

$$5\lambda + 1 = \frac{3(3\varepsilon+1)}{5-\varepsilon},$$

$$3(\lambda+1) = \frac{3(\varepsilon+3)}{3-\varepsilon}.$$

Le terme général de la valeur de $3\alpha(1+g_1)$, abstraction faite du facteur commun,

$$\frac{3\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)(3-\varepsilon)}\Sigma_1 m_1 \frac{1}{r^{n_1-1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}},$$

est donc

$$(-1)^m \varepsilon^{m-1} \frac{(n_1+1)(n_1+3)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}$$
$$\times\left[3X_m + X_{m+1} - \frac{n_1+2m+1}{2(m+1)}(3X_{m+2} + X_{m+1})\right].$$

De la relation (29) on tire

$$(3+2m)X_{m+1} + 2(m+1)X_m = 1,$$
$$(5+2m)X_{m+2} + 2(m+2)X_{m+1} = 1;$$

on peut donc exprimer X_{m+1} et X_{m+2} en fonction de X_m, et la parenthèse devient, toutes réductions faites,

$$(4-n_1)\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

On voit encore apparaître ici le facteur commun $4-n_1$, comme on

devait s'y attendre, et le terme général, dans $3\alpha(1+g_1)$, devient

$$\frac{-3\mu_1}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1 \frac{m_1}{r^{n_1+1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}$$
$$\times(-1)^m \varepsilon^{m+1}\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\;\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}.$$

Pour $m=0$ le coefficient $\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}$ doit être réduit à 1, et l'on a

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}3\alpha(1+g_1) &= \frac{-3\mu_1\varepsilon}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1\frac{m_1}{r^{n_1+1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}\\ &\quad\times\left[\frac{7X_0+1}{3.5}-\frac{(n_1+1)(11X_1+1)}{2.5.7}\varepsilon\right.\\ &\quad+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4.7.9}(15X_2+1)\varepsilon^2+\ldots\\ &\quad\left.+(-1)^m\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m\frac{(4m+7)X_m+1}{(3+2m)(5+2m)}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$(4m+7)X_m+1=8Y_m.$$

Si de cette relation on tire X_m et que l'on porte sa valeur dans (29), on a

$$(2m+1)(4m+3)Y_m-2m(4m+7)Y_{m-1}=(2m+1)(2m+3).$$

En appliquant à cette équation la méthode déjà employée et tenant compte de la condition

$$8Y_0=7X_0+1=8,\quad\text{d'où}\quad Y_0=1,$$

on voit que Y_m a le signe de $(-1)^m$; il en résulte que tous les termes de la série entre parenthèses sont positifs pour $\varepsilon>0$ et <1. On a donc finalement, en faisant $Y_m=(-1)^m Y'_m$, Y'_m étant tous positifs,

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}3\alpha(1+g_1) &= -\frac{3\mu_1\varepsilon}{(g+3h)(3-\varepsilon)}\sum_1\frac{m_1}{r^{n_1+1}}\sqrt{\frac{2^{n_1-3}}{(2+\lambda)^{n_1+1}}}\\ &\quad\times\left[\frac{1}{3.5}+\frac{(n_1+1)Y'_1}{2.5.7}\varepsilon+\frac{(n_1+1)(n_1+3)}{2.4.7.9}\varepsilon^2 Y'_2+\ldots\right.\\ &\quad\left.+\frac{(n_1+1)\ldots(n_1+2m-1)}{2.4\ldots 2m}\varepsilon^m\frac{Y'_m}{(3+2m)(5+2m)}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que α a constamment le signe de

$$\frac{-\mu_1}{g+3h}.$$

Pour $\lambda = 0$ ou $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, ce qui devait être.

XI. — Discussion et conséquences.

J'emprunte encore à l'Ouvrage de Dufrénoy des données numériques pour comparer à l'observation les résultats des calculs précédents.

Parmi les cristaux répulsifs appartenant au système du rhomboèdre, on trouve :

Le corindon,

$$V = 85^{\circ}50';$$

Le cinabre,

$$V = 62^{\circ}58';$$

L'arséniate de cuivre,

$$V = 58^{\circ}10'.$$

Pour ces cristaux λ ou ε est positif, et, comme α est positif, on en conclut (formule 31)

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0.$$

Pour les cristaux attractifs :

Le quartz,

$$V = 93^{\circ}58';$$

La dioptase,

$$V = 95^{\circ}16';$$

L'argent rouge,

$$V = 103^{\circ}16'.$$

Pour ces cristaux λ est négatif et α est aussi négatif ; donc, en vertu

de la formule (28), on doit avoir aussi

$$\frac{\mu_1}{g - 3h} < 0.$$

Ainsi l'on est conduit encore à cette conséquence que, *si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales, il est repoussé par les particules pondérables*.

En outre, le calcul, d'accord avec l'observation, conduit à cette loi :

Un cristal appartenant au système rhomboédrique est attractif ou répulsif, suivant que l'angle de la face à l'extrémité de l'axe est obtus ou aigu.

Le spath et la tourmaline paraissent contredire ces conséquences. La considération du clivage a fait admettre par plusieurs minéralogistes, pour forme primitive du spath, un rhomboèdre obtus dont les dièdres au sommet valent 105°5′ et les faces 101°55′, et ce cristal est répulsif. Mais, en y regardant de près, on voit que ce choix n'a rien de nécessaire. Haüy ne prenait pas pour forme primitive celle dont nous venons de parler, et il a décrit d'autres rhomboèdres de spath se déduisant les uns des autres et du solide de clivage, et *vice versa*, d'après les lois ordinaires des modifications cristallines ; quelques-uns sont très aigus, et c'est le plus grand nombre. En particulier, on trouve l'*inverse*, désigné par le symbole e', dit inverse d'Haüy, et qui jouit de cette propriété géométrique que ses faces sont supplémentaires des dièdres du premier, et *vice versa ;* la section principale a donc les mêmes angles que dans le solide de clivage. Le solide de clivage est extrêmement rare dans la nature ; l'inverse se rencontre bien plus fréquemment. Il y a donc quelque raison de penser que cette forme inverse correspond plutôt que le solide de clivage à la forme primitive, c'est-à-dire que les files de particules sont parallèles à ses arêtes. L'angle V pour ce rhomboèdre étant de 74°55′, le spath rentre ainsi dans la première série des cristaux déjà cités.

La même observation s'applique en tout point à la tourmaline dont la forme primitive serait encore l'inverse e', dont l'angle V vaut 46°24′. Ce cristal est aussi répulsif.

On objectera peut-être à ce qui précède que l'on pourrait tout aussi bien prendre les inverses des formes adoptées pour les autres cristaux cités, ce qui renverserait nos conclusions; mais, sauf pour l'argent rouge, on ne trouve jamais ces formes inverses à l'état naturel (Dufrénoy).

Le spath et la tourmaline peuvent être considérés comme des exemples de l'usage très important que l'on pourrait faire de la loi, pour fixer la forme primitive, dans les cas douteux.

Le spath nous fournit un moyen de contrôle particulier. On sait, comme l'a montré Mitscherlisch, que ce cristal se contracte perpendiculairement à l'axe optique et se dilate parallèlement à cet axe, sous l'influence d'une élévation de température. Les mesures ont été prises sur le solide de clivage qui se rapproche ainsi du cube : son inverse s'en rapproche donc aussi. M. Fizeau a recherché les modifications qui en résultent dans les propriétés optiques, et il a trouvé que l'indice extraordinaire, le plus faible, croît et que l'indice ordinaire décroît, si bien que la double réfraction tend à disparaître. Cela est bien d'accord avec nos formules qui montrent que α tend vers zéro avec λ.

Par des calculs semblables à ceux que l'on a faits pour démontrer que α avait toujours le signe de $-\frac{\mu_1}{g+3h}$, on prouve que α varie en sens inverse de λ si $\frac{\mu_1}{g+3h} < 0$, et dans le même sens si $\frac{\mu_1}{g+3h} > 0$.

En faisant $\frac{\nu_o}{\nu_e} = f$, on a trouvé

$$2\alpha = 1 - \frac{3}{2+f^2} \quad (^1);$$

il en résulte que f varie dans le même sens que λ, ou, en sens inverse, suivant que $\frac{\mu_1}{g+3h}$ est négatif ou positif.

Or dans le cas du spath en prenant, comme on l'a dit, pour forme

(1) Cette formule donne

$$\alpha = 0,038 \text{ pour le spath,}$$
$$\alpha = -0,002 \text{ pour le quartz.}$$

primitive l'inverse d'Haüy qui est aigu, l'expérience rappelée plus haut prouve que, lorsque λ décroît, f décroît aussi ; donc il est nécessaire que

$$-\frac{\mu_1}{g+3h} < 0$$

et, par suite,

$$\mu_1 < 0 \quad \text{si} \quad g + 3h > 0.$$

Ainsi toutes les comparaisons du calcul et de l'expérience, quant au sens des phénomènes, conduisent à cette conclusion que la matière pondérable *repousse* l'éther, si l'on admet que l'éther libre peut propager des vibrations longitudinales, ce qui semble nécessaire pour l'explication de tous les phénomènes de la réfraction.

Sur l'équilibre et la déformation des pièces circulaires;

PAR M. H. LEAUTÉ,
Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Après les pièces droites, qui sont surtout employées dans les constructions civiles, celles que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique sont les pièces circulaires, c'est-à-dire celles dont la fibre moyenne est un cercle [1].

L'objet de ce travail est d'indiquer, pour ces dernières, la marche générale que l'on peut suivre dans l'étude du problème général de la déformation d'une pièce soutenue par un nombre quelconque d'appuis fixes ou élastiques, formant ou non encastrement, et soumise à des forces extérieures quelconques.

Ce problème est celui qui se présente dans l'étude d'un grand nombre de pièces mécaniques, et il offre à ce titre un réel intérêt. Les roues ordinaires, les poulies de transmission, les volants, les roues montées en tension, sont autant de cas particuliers importants en pratique qui rentrent dans le cas général que nous allons étudier; on peut

[1] Nous avons montré que, lorsqu'on applique aux pièces courbes les formules établies pour les pièces droites, il convient de prendre comme définition de la fibre moyenne, non comme on le fait d'ordinaire, le lieu des centres de gravité ou d'élasticité proprement dits des sections normales, mais bien le lieu des centres de percussion de ces sections correspondant aux droites symétriques des droites polaires par rapport aux centres d'élasticité (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 juin 1884).

y joindre le cas des arcs circulaires posés sur deux appuis, que l'on examine presque seul dans les Cours de résistance des matériaux [1].

Nous avons montré dans un précédent travail [2] que la déformation d'une pièce courbe quelconque, soumise à des forces également quelconques, était déterminée par les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{ds} - \dfrac{T}{\rho} + \mathfrak{L} = 0, \\[2mm] \dfrac{dT}{ds} + \dfrac{L}{\rho} + \mathfrak{T} = 0, \\[2mm] \dfrac{dM}{ds} + T + \mathfrak{M} = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} L = ES\lambda, \\ T = KES\tau, \\ M = ESr^2\varphi, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\gamma}{\rho}, \\[2mm] \tau = \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\alpha}{\rho} - \theta, \\[2mm] \varphi = \dfrac{d\theta}{ds}. \end{cases}$$

Dans ces équations, L, M, T et λ, τ, φ représentent, d'une part, les

---

(1) Il convient d'ajouter cependant que M. Resal a traité deux de ces problèmes dans son *Traité de Mécanique générale*, tome V, page 87; il a déterminé la déformation d'un anneau circulaire dont la section est constante et qui repose sur un plan horizontal sous l'action d'une force verticale appliquée à son sommet. Puis il a repris la même question, l'anneau étant maintenu latéralement par deux plans verticaux.

Enfin, M. Maurice Lévy vient de publier récemment un travail du plus haut intérêt où il a donné la solution complète du problème de la résistance d'un anneau circulaire à la flexion, lorsque cet anneau est soumis extérieurement à une pression constante (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 septembre 1883, p. 694 : *Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications*).

(2) *Application de la résistance des matériaux au calcul des pièces de machines* (*Journal de l'École Polytechnique*, LIIe Cahier, p. 201; 1882).

efforts élastiques et, d'autre part, l'allongement, le glissement et la flexion qui se produisent au point considéré; α et γ sont les déplacements de ce point comptés suivant la tangente et la normale à la courbe primitive; θ est la déviation angulaire de la section normale correspondante; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ sont les composantes et les moments des forces extérieures agissant sur l'élément considéré, les deux premières de ces quantités étant, comme α et γ, comptées suivant la tangente et la normale à la courbe non déformée; enfin ρ et s désignent le rayon de courbure et l'arc de cette dernière courbe. S et r sont la surface de la section normale et son rayon de gyration pris par rapport à l'axe de la flexion; E et KE sont les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale de la matière qui constitue la pièce.

Pour l'application de ces formules, il faut d'ailleurs avoir égard aux conventions suivantes : le sens positif des α est celui des s positifs; le sens positif des rotations θ est celui qui amène les α positifs sur les γ positifs par une rotation de $\frac{\pi}{2}$; le rayon de courbure ρ est positif quand le centre de courbure est sur les γ positifs; enfin les efforts élastiques L, T, M sont ceux qui s'exercent sur la face positive de l'élément considéré, c'est-à-dire sur la portion de la pièce la plus rapprochée de l'origine des s.

Nous supposerons que les forces extérieures agissant sur la pièce circulaire peuvent être évaluées comme si cette pièce n'avait pas été déformée. Cette hypothèse est évidemment toujours admissible, sauf dans des cas tout à fait spéciaux. Quant aux réactions des appuis, nous admettrons qu'elles peuvent dépendre des déformations. S'il est permis, en effet, quand il s'agit de la poutre droite à plusieurs travées, de considérer les supports comme invariables en raison des dimensions mêmes qu'ils présentent, il n'en est plus de même dans le cas général, car les appuis, qui sont les bras de la poulie par exemple ou les rais de la roue montée en tension, sont des pièces élastiques au même degré que la jante.

Les forces extérieures $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ sont donc indépendantes de α, γ et θ et uniquement fonction de s; d'ailleurs ρ est constant en vertu de l'hypothèse même faite sur la forme des pièces étudiées; les équations du

problème se réduisent dès lors à des équations linéaires à coefficients constants [1].

---

[1] Il est plusieurs cas où l'on pourrait intégrer immédiatement les équations (1) par des fonctions connues; nous en signalerons deux qui présentent quelque intérêt.

Si ρ est de la forme $a + bs$, il suffira de poser

$$\rho = a + bs = e^t$$

pour que les équations simultanées

$$\frac{dL}{ds} - \frac{T}{\rho} = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{L}{\rho} = 0,$$

deviennent

$$b\frac{dL}{dt} - T = 0, \quad b\frac{dT}{dt} + L = 0;$$

d'où l'on déduit

$$L = A\cos\frac{t}{b} + B\sin\frac{t}{b}, \quad T = -A\sin\frac{t}{b} + B\cos\frac{t}{b}.$$

Si ρ est de la forme $\frac{1}{\Delta \operatorname{am} s}$, les intégrales des équations simultanées

$$\frac{dL}{ds} - \frac{T}{\Delta \operatorname{am} s} = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{L}{\Delta \operatorname{am} s} = 0$$

sont, comme on le sait,

$$L = A\sin \operatorname{am} s - B\cos \operatorname{am} s, \quad T = A\cos \operatorname{am} s - B\sin \operatorname{am} s,$$

qui représentent, si l'on considère L et T comme les coordonnées d'un point, les équations de la courbe élastique.

Les deux cas d'intégration que nous citons ici correspondraient au cas où l'on voudrait résoudre le problème général de la déformation pour des pièces dont l'état naturel serait défini par l'une des deux équations

$$\rho = a + bs, \quad \rho = \frac{1}{\Delta \operatorname{am} s}.$$

Cette remarque peut présenter dans la pratique une certaine importance, en permettant de substituer à la courbe véritable, dont l'étude analytique sera souvent difficile, l'une des deux courbes précédentes, choisie de façon à en différer très peu.

La courbe élastique, en particulier, par la multiplicité des formes qu'elle présente, se prête d'une façon toute spéciale à ce genre d'approximation.

Les intégrales s'obtiennent facilement par les méthodes connues.

Des deux premières équations (1) on tire d'abord L et T qui ont pour expressions

$$\mathrm{L} = -\sin\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{Q}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds - \cos\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{Q}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds,$$

$$\mathrm{M} = -\cos\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{Q}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds + \sin\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{Q}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds,$$

ou

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \mathfrak{A}\sin\dfrac{s}{\rho} + \mathfrak{B}\cos\dfrac{s}{\rho}, \\ \mathrm{T} = \mathfrak{A}\cos\dfrac{s}{\rho} - \mathfrak{B}\sin\dfrac{s}{\rho}, \end{cases}$$

en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\displaystyle\int\left(\mathcal{Q}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds, \\ \mathfrak{B} = -\displaystyle\int\left(\mathcal{Q}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds. \end{cases}$$

On obtient ensuite M en portant la valeur obtenue pour T dans la troisième des équations (1)

$$(6)\qquad \mathrm{M} = -\rho\mathfrak{A}\sin\frac{s}{\rho} - e\,\mathfrak{B}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{C},$$

où l'on a fait

$$(7)\qquad \mathcal{C} = \int(\mathfrak{M} + \rho\mathcal{Q})\,ds.$$

On peut remarquer d'ailleurs que cette expression de M se déduit de suite de la relation

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds} + \rho\frac{d\mathrm{L}}{ds} + \mathfrak{M} + \rho\mathcal{Q} = 0,$$

conséquence immédiate des équations (1).

Les efforts élastiques L, T, M étant ainsi exprimés en fonction de s, on tirera immédiatement les valeurs de λ, τ et φ des équations (2) :

on aura

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{ES}}\left(\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{\mathrm{KES}}\left(\mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\varphi = \frac{-1}{\mathrm{ES}r^2}\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right).$$

La valeur de θ s'obtiendra ensuite à l'aide d'une quadrature par la dernière des équations (3)

$$(8)\qquad \theta = -\frac{1}{\mathrm{ES}r^2}\int\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right)ds.$$

Quant à α et γ, leurs valeurs résultent de l'intégration des deux premières équations (3)

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = \mathcal{E}\sin\dfrac{s}{\rho} + \mathcal{F}\cos\dfrac{s}{\rho}, \\ \gamma = \mathcal{E}\cos\dfrac{s}{\rho} - \mathcal{F}\sin\dfrac{s}{\rho}, \end{cases}$$

en posant

$$\mathcal{E} = \int\left[\lambda\sin\frac{s}{\rho} + (\theta + \tau)\cos\frac{s}{\rho}\right]ds,$$

$$\mathcal{F} = \int\left[\lambda\cos\frac{s}{\rho} - (\theta + \tau)\sin\frac{s}{\rho}\right]ds.$$

En résumé, on a comme intégrales générales du problème les neuf équations

$$\mathrm{L} = \mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho},$$

$$\mathrm{T} = \mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho},$$

$$\mathrm{M} = -\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} - \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{C},$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{ES}}\left(\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{\mathrm{KES}}\left(\mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\varphi = -\frac{1}{\mathrm{ES}r^2}\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right)$$

$$\theta = -\frac{1}{\mathrm{ES}r^2}\int\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right)ds,$$

$$\alpha = \mathcal{E}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{F}\cos\frac{s}{\rho},$$

$$\gamma = \mathcal{E}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{F}\sin\frac{s}{\rho},$$

qui s'obtiennent par de simples quadratures et renferment six constantes arbitraires provenant des six intégrales

$$\mathcal{A},\quad \mathcal{B},\quad \mathcal{C},\quad \mathcal{E},\quad \mathcal{F}\quad \text{et}\quad \int\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right)ds.$$

Ces six constantes se répartissent de la manière suivante : les deux premières donnent L, T, λ et τ, la troisième permet ensuite de trouver M et φ, la quatrième fournit alors θ, et enfin les deux dernières déterminent α et γ, toutes les autres quantités étant connues.

Ces diverses constantes conservent évidemment les mêmes valeurs tant que les efforts élastiques ne subissent pas de variations brusques par le fait de la réaction d'un appui ou de l'action d'une force extérieure de grandeur finie s'exerçant en un point déterminé. Si donc nous partageons la pièce considérée en tronçons séparés, soit par un support, soit par un point d'application de force, c'est-à-dire séparés par ce que nous appellerons *un point de discontinuité*, et si nous supposons que les tronçons, ainsi définis, soient au nombre de n, il y aura $6n$ constantes à déterminer.

La détermination de ces constantes résultera des conditions relatives aux déformations que subit la pièce aux points de discontinuité et des efforts qu'elle supporte en ces points; les $6n$ constantes dont nous venons de parler dépendront donc de la nature des réactions des appuis et des actions extérieures finies; nous allons montrer que, dans tous les cas, on aura $6n$ équations pour les déterminer et indiquer comment l'on peut établir ces équations.

Un appui quelconque étant toujours plus ou moins élastique, la réaction qu'il produit dépend de la déformation de l'élément de la pièce

qui y correspond, c'est-à-dire des trois quantités α, γ et θ. Si donc on désigne par X_i et Z_i les composantes de la réaction de l'appui i suivant la tangente et la normale à la fibre moyenne au point considéré, et par N_i le couple élastique agissant en ce point, on peut affirmer que les quantités X_i, Z_i, N_i ne contiennent d'autres indéterminées que α_i, γ_i et θ_i.

Il est facile de voir d'ailleurs que, les réactions de l'appui maintenant en équilibre l'élément de la pièce qui est en contact avec lui et qui est soumis aux actions des deux tronçons contigus, on a

$$(11)\qquad L'_i - L''_{i-1} + X_i = 0, \quad T'_i - T''_{i-1} + Z_i = 0, \quad M'_i - M''_{i-1} + N_i = 0,$$

où l'on a désigné par un accent les quantités qui se rapportent à l'origine d'un tronçon, et par deux accents celles qui se rapportent à l'extrémité opposée.

Si le point de discontinuité i, au lieu de correspondre à un point d'appui, correspondait à un effort extérieur fini, les mêmes équations (11) s'appliqueraient encore, avec cette différence que X_i, Z_i, N_i se réduiraient à des constantes, puisque la force donnée ne dépendrait pas de la déformation que peut subir la pièce en son point d'application.

Dans les deux cas, aucune des équations (11) n'introduira de nouvelles constantes indéterminées.

Il faut maintenant ajouter aux équations (11) ce que l'on pourrait appeler les équations de continuité, c'est-à-dire celles qui expriment que les divers tronçons, dans lesquels nous avons décomposé la pièce, ne forment qu'une seule et même pièce; il suffit, pour cela, d'écrire que, de part et d'autre d'un point de discontinuité, les déformations des deux extrémités de tronçons qui s'y joignent sont les mêmes, c'est-à-dire que α, γ et θ ont la même valeur; on obtient ainsi

$$(12)\qquad \alpha'_i - \alpha''_{i-1} = 0, \quad \gamma'_i - \gamma''_{i-1} = 0, \quad \theta'_i - \theta''_{i-1} = 0.$$

Si la pièce forme un cercle complet, on a, pour n tronçons, n points de discontinuité, c'est-à-dire n systèmes d'équations (11) et n systèmes d'équations (12), soit en total $6n$ équations.

Si les deux extrémités de la pièce sont libres, on a, pour n tronçons, $n - 1$ points de discontinuité auxquels s'appliquent les équations (11) et (12), ce qui donne $6(n-1)$ équations. Mais il faut remarquer qu'aux deux extrémités les efforts élastiques sont nuls, ce qui s'exprime par six nouvelles équations (11); on a donc encore en total $6n$ équations.

Enfin, si les deux extrémités de la pièce sont en contact avec des supports, on a, pour n tronçons, $n + 1$ points de continuité, c'est-à-dire $3(n+1)$ équations (11), mais on n'a plus évidemment que $n - 1$ supports auxquels s'appliquent les équations (12), ce qui donne en somme $6n$ équations.

On voit ainsi que, en toute hypothèse, on a toujours $6n$ équations pour déterminer les $6n$ constantes arbitraires qui, ainsi que nous l'avons vu, sont introduites par l'intégration (1).

Les quantités X, Z, N devront d'ailleurs être regardées comme des fonctions linéaires en α, γ et θ, et, par suite, toutes les constantes arbitraires entreront simplement au premier degré dans les équations qui les déterminent.

Chacune de ces équations, qu'elle appartienne au système (11) ou au système (12), renferme les constantes relatives à deux tronçons successifs; le nombre des inconnues contenues dans la même équation est ainsi de douze en général, sauf pour celles en $\mathfrak{G}$ qui n'en contiennent que huit.

Les formules générales ayant été ainsi établies et le procédé de calcul des constantes qu'elles contiennent ayant été indiqué, nous allons examiner les modifications qu'éprouvent ces formules dans les divers cas particuliers.

Nous examinerons tout d'abord comment varie la forme des fonctions X, Z, N suivant la nature de l'appui et la façon dont il est relié à la pièce.

Quand cet appui est une pièce élastique réunie assez solidement à la pièce circulaire pour que le point de jonction constitue un encastre-

(1) Bien que nous ne nous proposions dans ce travail que d'étudier le cas des pièces circulaires, il nous paraît utile de remarquer que nos formules s'appliquent aux pièces composées d'arcs de cercle successifs. On pourrait, de la sorte, étendre l'application de ces formules aux pièces courbes quelconques.

ment réciproque, X, Z, N doivent contenir chacune les trois variables α, γ et θ, puisque toute déformation de la pièce au point d'appui doit entraîner une déformation du support et, par suite, une variation des composantes de la réaction. C'est le cas d'une pièce coulée. Dans cette hypothèse, la composition de chacune des composantes X, Z, N en α, γ et θ dépendra surtout de la forme de la pièce élastique formant appui. Ainsi, quand on considère une roue ordinaire de transmission, la relation entre X, par exemple, et les trois déformations α, γ, θ sera différente suivant que les bras seront droits ou courbes. Avec les bras courbes les efforts dus respectivement aux variations de α et de γ seront du même ordre de grandeur. Avec les bras droits, au contraire, les efforts dus aux variations de γ seront ordinairement beaucoup plus grands que ceux dus aux variations de α, et l'on pourra regarder les γ comme négligeables. Les équations

$$\gamma'_i - \gamma''_{i-1} = 0$$

pourront alors être remplacées par les deux équations

$$\gamma'_i = 0, \quad \gamma''_{i-1} = 0.$$

Par contre, l'effort Z cessera d'être déterminé en fonction de α, γ, θ et deviendra une nouvelle inconnue.

Cette introduction d'une inconnue de plus sera compensée par le dédoublement de l'équation précédente, et il y aura toujours égalité entre le nombre des équations et celui des inconnues.

Lorsque la réunion des appuis à la pièce ne présente pas assez de rigidité pour constituer un encastrement, il faut supposer N nul, puisque l'appui n'empêche pas une rotation autour de son point d'attache de rendre X et Z indépendants de θ. C'est le cas des volants de grande dimension et des roues montées en tension.

Chacune des équations en θ et en M ne renferme plus alors que huit constantes.

Il peut encore arriver, dans le cas qui nous occupe, que X et Z soient susceptibles d'être regardés comme indépendants de γ et seulement fonctions de α.

Enfin les appuis peuvent être fixes, soit qu'ils déterminent d'une façon absolue les trois quantités α, γ et θ ou seulement quelques-unes d'entre elles. Les équations (12) doivent alors être remplacées par tout ou partie des suivantes :

$$\alpha'_i = 0, \quad \gamma'_i = 0, \quad \theta'_i = 0,$$
$$\alpha''_{i+1} = 0, \quad \gamma''_{i+1} = 0, \quad \theta''_{i+1} = 0,$$

en même temps que les efforts X, Z, N correspondant à celles des quantités α, γ, θ qui s'annulent, deviendront de nouvelles inconnues.

Il est clair qu'à chaque nouvelle inconnue correspond une équation qui se dédouble, et que, ainsi, il y a toujours égalité entre le nombre des équations et celui des inconnues.

Si l'appui, tout en étant fixe, ne présente pas d'encastrement sur la pièce, θ ne sera pas forcément nul au dessus de cet appui, et N, au contraire, deviendra nul.

De même, si l'appui permet un glissement longitudinal de la pièce, X deviendra nul et α cessera de l'être.

Les considérations qui précèdent montrent comment on pourra, dans tous les cas, déterminer l'état d'une pièce circulaire soumise à des efforts connus et soutenus par divers appuis.

La question revient toujours à résoudre un certain nombre d'équations du premier degré dès qu'on a effectué les quadratures nécessaires, lesquelles peuvent d'ailleurs être obtenues par les méthodes connues d'approximation.

Nous avons pris pour inconnues les constantes arbitraires introduites par l'intégration, mais on peut leur substituer les réactions X, Z, N des appuis et les déformations correspondantes x, z, t.

Il suffit, pour cela, de joindre aux équations d'équilibre au droit des points d'appui

$$(13)\quad L'_i - L''_{i+1} + X_i = 0, \quad T'_i - T''_{i+1} + Z_i = 0, \quad M'_i - M''_{i+1} + N_i = 0$$

les équations résultant de la constitution même de l'appui et qui donnent les réactions en fonction des déformations

$$(14)\quad X_i = f_i(x_i, z_i, t_i), \quad Z_i = \varphi_i(x_i, z_i, t_i), \quad N_i = \psi_i(x_i, z_i, t_i),$$

et les équations qui expriment l'égalité des déformations à l'appui et de celles des deux tronçons qui s'y réunissent

$$(15)\qquad \alpha'_i = x_i, \quad \gamma'_i = z_i, \quad \theta'_i = t_i,$$

$$(16)\qquad \alpha''_{i-1} = x_i, \quad \gamma''_{i-1} = z_i, \quad \theta''_{i-1} = t_i;$$

on éliminera ensuite les constantes arbitraires.

Pour faire l'élimination des douze constantes relatives aux deux tronçons contigus à l'appui considéré, il suffira de joindre aux équations (13), (15) et (16) les six équations

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha'_{i-1} = x_{i-1}, \quad \gamma'_{i-1} = z_{i-1}, \quad \theta'_{i-1} = t_{i-1}, \\ \alpha''_i = x_{i+1}, \quad \gamma''_i = z_{i-1}, \quad \theta''_i = t_{i+1}. \end{cases}$$

Au moyen des douze équations (15), (16) et (17) on exprimera les douze constantes en fonction des neuf quantités $x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}, x_i, z_i, t_i, x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1}$ et, en portant ces expressions dans les équations (13), on aura trois équations indépendantes de ces constantes et qui contiendront les neuf quantités précédentes avec X_i, Z_i, N_i.

En combinant alors ces trois équations avec les trois équations (14), on pourra, entre ces six équations, soit éliminer X_i, Z_i, N_i, ce qui donnera trois relations entre les déformations en trois points d'appui consécutifs, soit tirer des équations (14) x_i, z_i, t_i en fonction de X_i, Z_i, N_i, les porter dans les trois équations trouvées et obtenir ainsi trois relations entre $X_{i-1}, Z_{i-1}, N_{i-1}, X_i, Z_i, N_i, X_{i+1}, Z_{i-1}, N_{i+1}$.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant qui constitue la généralisation du théorème de Clapeyron sur les trois moments successifs dans une poutre droite à plusieurs travées :

Dans une pièce circulaire à plusieurs appuis, les réactions d'un point d'appui quelconque peuvent toujours s'exprimer à l'aide des réactions des deux points d'appui immédiatement voisins et les relations ainsi obtenues sont des relations linéaires.

Il importe de remarquer que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature des forces qui sollicitent la pièce circulaire et que nous

n'avons pas supposé non plus que cette pièce ait une section constante.

Les conséquences précédentes sont donc vraies aussi bien pour une pièce ayant ses extrémités libres que pour un cercle complet, puisqu'on peut compléter cette pièce par un arc dont on suppose la section nulle.

Il est bien entendu que les conclusions ci-dessus s'appliquent, non seulement aux véritables points d'appui, mais à tout point de discontinuité, c'est-à-dire à tout point où s'exerce une action de grandeur finie linéaire en x, z, t, avec ou sans terme constant.

Nous allons indiquer comment l'on peut diriger le calcul pour obtenir les trois relations qui, d'après le théorème précédent, existent entre les efforts exercés sur trois points d'appui consécutifs.

Pour cela, considérons une pièce circulaire *complète* soutenue en n points par des appuis formant encastrement et cherchons les effets d'une force extérieure unique agissant en un point de l'une des n travées.

Ce problème une fois résolu peut être considéré comme donnant la solution du problème général, puisqu'il est toujours permis, dans la pratique, de remplacer une force répartie d'une manière continue par un certain nombre de forces isolées. C'est même le procédé habituellement employé, en raison de ce qu'il se prête mieux à l'application des méthodes graphiques.

Nous négligerons d'ailleurs λ et τ, comme on le fait d'ordinaire.

Dans ces conditions, les n points d'appui et le point d'application de la force constituent $n+1$ points de discontinuité et l'on peut regarder la pièce comme partagée en $n+1$ tronçons dans l'étendue desquels les forces extérieures $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ sont nulles.

On a alors pour chacun d'eux, d'après les équations (1)

$$(1') \qquad \begin{cases} L = A \sin\dfrac{s}{\rho} + B \cos\dfrac{s}{\rho}, \\[2ex] T = A \cos\dfrac{s}{\rho} - B \sin\dfrac{s}{\rho}, \end{cases}$$

A et B étant des constantes, puisque les équations différentielles qui fournissent L et T n'ont plus alors de seconds membres.

L'équation (6) donne de même

$$(6') \qquad \mathrm{M} = -\rho \mathrm{A} \sin\frac{s}{\rho} - \rho \mathrm{B} \cos\frac{s}{\rho} + \mathrm{C}\rho.$$

On tire ensuite de l'équation (8), en y remplaçant M par sa valeur,

$$\vartheta = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{S} r^2} \int \left(-\rho \mathrm{A} \sin\frac{s}{\rho} - \rho \mathrm{B} \cos\frac{s}{\rho} + \mathrm{C}\rho \right) ds,$$

d'où l'on déduit

$$(8') \qquad \varepsilon \mathrm{S} r^2 \vartheta = \rho^2 \mathrm{A} \cos\frac{s}{\rho} - \rho^2 \mathrm{B} \sin\frac{s}{\rho} + \mathrm{C}\rho s + \mathrm{D}\rho^2.$$

Enfin, l'on a, par les équations (9),

$$\alpha = \mathcal{E} \sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{F} \cos\frac{s}{\rho},$$

$$\gamma = \mathcal{E} \cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{F} \sin\frac{s}{\rho},$$

dans lesquelles

$$\mathcal{E} = \int \vartheta \cos\frac{s}{\rho}\, ds,$$

$$\mathcal{F} = \int -\vartheta \sin\frac{s}{\rho}\, ds,$$

ou encore, si l'on remplace ϑ par l'expression précédemment trouvée,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \frac{\rho^2}{\varepsilon \mathrm{S} r^2} \Bigg[& \frac{\mathrm{A}}{2}\left(s + \frac{\rho}{2} \sin\frac{2s}{\rho} \right) + \mathrm{B}\frac{\rho}{4} \cos\frac{2s}{\rho} \\
& + \mathrm{C}\left(s \sin\frac{s}{\rho} + \rho \cos\frac{s}{\rho} \right) + \mathrm{D}\rho \sin\frac{s}{\rho} + \mathrm{E}\rho \Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \frac{\rho^2}{\varepsilon \mathrm{S} r^2} \Bigg[& \mathrm{A}\frac{\rho}{4} \cos\frac{2s}{\rho} + \frac{\mathrm{B}}{2}\left(s - \frac{\rho}{2} \sin\frac{2s}{\rho} \right) \\
& + \mathrm{C}\left(s \cos\frac{s}{\rho} - \rho \sin\frac{s}{\rho} \right) + \mathrm{D}\rho \cos\frac{s}{\rho} + \mathrm{F}\rho \Bigg].
\end{aligned}$$

On en conclut

$$(9')\quad\begin{cases}\varepsilon S r^2 \alpha = \rho^2 \Big[\dfrac{A}{2}\Big(s \sin\dfrac{s}{\rho} + \dfrac{\rho}{2}\cos\dfrac{s}{\rho}\Big) + \dfrac{B}{2}\Big(s\cos\dfrac{s}{\rho} - \dfrac{\rho}{2}\sin\dfrac{s}{\rho}\Big) \\ \qquad\qquad + Cs + D\rho + E\rho\sin\dfrac{s}{\rho} + F\rho\cos\dfrac{s}{\rho}\Big], \\ \varepsilon S r^2 \gamma = \rho^2 \Big[\dfrac{A}{2}\Big(s\cos\dfrac{s}{\rho} + \dfrac{\rho}{2}\sin\dfrac{s}{\rho}\Big) - \dfrac{B}{2}\Big(s\sin\dfrac{s}{\rho} - \dfrac{\rho}{2}\cos\dfrac{s}{\rho}\Big) \\ \qquad\qquad + C\rho + E\rho\cos\dfrac{s}{\rho} - F\rho\sin\dfrac{s}{\rho}\Big].\end{cases}$$

Résolvons les six équations (4'), (6'), (8'), (9') par rapport aux six constantes d'intégration A, B, C, D, E, F.

Des deux équations (4') on tire

$$A = L\sin\frac{s}{\rho} + T\cos\frac{s}{\rho},$$

$$B = L\cos\frac{s}{\rho} - T\sin\frac{s}{\rho};$$

d'où, par (6'),

$$C = \frac{1}{\rho}M + L$$

et par (8'),

$$D = \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^2}\theta - L\frac{s}{\rho} - M\frac{s}{\rho^2} - T.$$

Enfin, les équations (9') donnent les valeurs de E et F

$$E = \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\Big(\alpha\sin\frac{s}{\rho} + \gamma\cos\frac{s}{\rho} - \rho\theta\sin\frac{s}{\rho}\Big)$$
$$- \frac{L}{2}\Big(\frac{s}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + \frac{5}{2}\cos\frac{s}{\rho}\Big) + \frac{T}{2}\Big(\frac{3}{2}\sin\frac{s}{\rho} - \frac{s}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}\Big) - \frac{M}{\rho}\cos\frac{s}{\rho},$$

$$F = \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\Big(\alpha\cos\frac{s}{\rho} - \gamma\sin\frac{s}{\rho} - \rho\theta\cos\frac{s}{\rho}\Big)$$
$$+ \frac{L}{2}\Big(\frac{5}{2}\sin\frac{s}{\rho} - \frac{s}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}\Big) + \frac{T}{2}\Big(\frac{s}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + \frac{3}{2}\cos\frac{s}{\rho}\Big) + \frac{M}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}.$$

Il suffit alors, pour éliminer les constantes A, B, C, D, E, F, d'égaler

leurs valeurs pour les deux extrémités de l'un des tronçons; on obtient ainsi six relations qui permettent d'exprimer les efforts aux extrémités en fonction des déformations que ces extrémités subissent.

Considérons donc deux tronçons voisins correspondant aux points de discontinuité $i-1$, i, $i+1$, et désignons par un accent les quantités se rapportant au début d'un tronçon, par deux accents celles relatives à son autre extrémité; nous aurons, en représentant par x, z, t, les déplacements α, γ, θ, aux points de discontinuité,

$$L'_i \sin\frac{s'}{\rho} + T'_i \cos\frac{s'}{\rho} = L''_{i+1} \sin\frac{s''}{\rho} + T''_{i+1} \cos\frac{s''}{\rho},$$

$$L'_i \cos\frac{s'}{\rho} - T'_i \sin\frac{s'}{\rho} = L''_{i+1} \cos\frac{s''}{\rho} - T''_{i+1} \sin\frac{s''}{\rho},$$

$$\frac{1}{\rho} M'_i + L'_i = \frac{1}{\rho} M''_{i+1} + L''_{i+1},$$

$$\frac{\varepsilon S r^2}{\rho^2} t_i - L'_i \frac{s'}{\rho} - M'_i \frac{s'}{\rho^2} - T'_i = \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^2} t_{i+1} - L''_{i+1} \frac{s''}{\rho} - M''_{i+1} \frac{s''}{\rho^2} - T''_{i+1},$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_i \sin\frac{s'}{\rho} + z_i \cos\frac{s'}{\rho} - \rho t_i \sin\frac{s'}{\rho}\right) \\
&\quad - \frac{L'_i}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} + \frac{5}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{T'_i}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s'}{\rho} - \frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) - \frac{M'_i}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho} \\
&= \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1} \sin\frac{s''}{\rho} + z_{i+1} \cos\frac{s''}{\rho} - \rho t_{i+1} \sin\frac{s''}{\rho}\right) \\
&\quad - \frac{L''_{i+1}}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} + \frac{5}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{T''_{i+1}}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s''}{\rho} - \frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) - \frac{M''_{i+1}}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_i \cos\frac{s'}{\rho} - z_i \sin\frac{s'}{\rho} - \rho t_i \cos\frac{s'}{\rho}\right) \\
&\quad + \frac{L'_i}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s'}{\rho} - \frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{T'_i}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} + \frac{3}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{M'_i}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} \\
&= \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1} \cos\frac{s''}{\rho} - z_{i+1} \sin\frac{s''}{\rho} - \rho t_{i+1} \cos\frac{s''}{\rho}\right) \\
&\quad + \frac{L''_{i+1}}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s''}{\rho} - \frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{T''_{i+1}}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} + \frac{3}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{M''_{i+1}}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}.
\end{aligned}$$

De ces six équations, nous allons tirer les six quantités L'_i, T'_i, M'_i, L''_{i+1}, T''_{i+1}, M''_{i+1} en fonction des déplacements x_i, z_i, t_i, x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}.

Pour cela, désignons par $\Delta^{(i,i+1)}$ le déterminant suivant :

$$\Delta^{(i,i+1)} = \begin{vmatrix} \sin\frac{s'}{\rho} & \cos\frac{s'}{\rho} & 0 & -\sin\frac{s''}{\rho} & -\cos\frac{s''}{\rho} & 0 \\ \cos\frac{s'}{\rho} & -\sin\frac{s'}{\rho} & 0 & \cos\frac{s''}{\rho} & \sin\frac{s''}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{\rho} & -1 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ -\frac{s'}{\rho} & -1 & -\frac{s'}{\rho^2} & \frac{s''}{\rho} & 1 & \frac{s''}{\rho^2} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}+\frac{5}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s'}{\rho}-\frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & -\frac{1}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho} & \frac{1}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho}+\frac{5}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s''}{\rho}-\frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & \frac{1}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s'}{\rho}-\frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}+\frac{3}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} & -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s''}{\rho}-\frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho}+\frac{3}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & -\frac{1}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} \end{vmatrix},$$

et représentons par $\Delta_1^{(i,i+1)}, \Delta_2^{(i,i+1)}, \ldots, \Delta_6^{(i,i+1)}$ les six déterminants obtenus en remplaçant successivement dans le déterminant $\Delta^{(i,i+1)}$ la première colonne, la deuxième, etc., par la suite des quantités

$0, 0, 0, \frac{ESr^2}{\rho^2}(t_{i+1}-t_i)$,

$$\frac{ESr^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} - x_i\sin\frac{s'}{\rho} + z_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} - z_i\cos\frac{s'}{\rho} - \rho t_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} + \rho t_i\sin\frac{s'}{\rho}\right),$$

$$\frac{ESr^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} - x_i\cos\frac{s'}{\rho} - z_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} + z_i\sin\frac{s'}{\rho} - \rho t_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} + \rho t_i\cos\frac{s'}{\rho}\right);$$

nous aurons

$$L'_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \qquad T'_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \qquad M'_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}},$$

$$L_{i+1} = \frac{\Delta_4^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad T_{i+1} = \frac{\Delta_5^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad M_{i+1} = \frac{\Delta_6^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}.$$

Ces formules établies, considérons les deux tronçons voisins $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$, et appliquons les résultats précédents aux deux extrémités qui se réunissent au point de discontinuité i; nous aurons

$$\mathrm{L}''_i = \frac{\Delta_4^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad \mathrm{T}''_i = \frac{\Delta_5^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad \mathrm{M}''_i = \frac{\Delta_6^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}},$$

$$\mathrm{L}'_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad \mathrm{T}'_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad \mathrm{M}'_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}},$$

et, comme

$$\mathrm{L}'_i - \mathrm{L}''_i = \mathrm{X}_i, \quad \mathrm{T}'_i - \mathrm{T}''_i = \mathrm{Z}_i, \quad \mathrm{M}'_i - \mathrm{M}''_i = \mathrm{N}_i,$$

on en déduit

$$\mathrm{X}_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_4^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad \mathrm{Z}_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_5^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad \mathrm{N}_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_6^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}},$$

qui donnent X_i, Z_i, N_i en fonction des déplacements x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}; x_i, z_i, t_i; x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1} des extrémités des deux tronçons qui aboutissent au point de discontinuité i.

Mais les composantes X_i, Z_i, N_i sont exprimables en fonction des déplacements x_i, z_i, t_i de leur point d'application; il suffit donc de remplacer, dans les trois expressions qui viennent d'être écrites, x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}; x_i, z_i, t_i; x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1} par leurs valeurs en fonction de X_{i-1}, Z_{i-1}, T_{i-1}; X_i, Z_i, T_i; X_{i+1}, Z_{i+1}, T_{i+1}; pour avoir les trois relations qui existent entre les efforts exercés sur trois points d'appui consécutifs, relations qui constituent, pour une pièce circulaire, le théorème de Clapeyron relatif aux pièces droites.

Nous ferons remarquer d'ailleurs, à titre d'indication générale, que le calcul qui précède se simplifie notablement si l'on prend pour origine le milieu du tronçon considéré. En désignant alors par 2ω l'angle au centre correspondant à ce tronçon, les six équations qui donnent L'_i, T'_i, M'_i, L''_{i+1}, T''_{i+1}, M''_{i+1} deviennent

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{L}'_i - \mathrm{L}''_{i+1})\cos\omega + (\mathrm{T}'_i + \mathrm{T}''_{i+1})\sin\omega = 0,\\
&(\mathrm{L}'_i - \mathrm{L}''_{i+1}) + \frac{(\mathrm{M}'_i - \mathrm{M}''_{i+1})}{\rho} = 0,\\
&\frac{(\mathrm{L}'_i - \mathrm{L}''_{i+1})}{2}\left(\omega\sin\omega + \frac{5}{2}\cos\omega\right) - \frac{(\mathrm{T}'_i + \mathrm{T}''_{i+1})}{2}\left(\omega\cos\omega - \frac{3}{2}\sin\omega\right) + \frac{(\mathrm{M}'_i - \mathrm{M}''_{i+1})}{\rho}\cos\omega\\
&\quad + \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left[(x_i + x_{i+1})\sin\omega - (z_i - z_{i+1})\cos\omega - \rho(t_i + t_{i+1})\sin\omega\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

$$(L'_i + L''_{i+1})\sin\omega - (T'_i - T''_{i+1})\cos\omega = 0,$$

$$\text{(B)}\quad\left\{\begin{aligned}
&(L'_i + L''_{i+1})\omega - (T'_i - T''_{i+1}) + \frac{M'_i + M''_{i+1}}{\rho}\omega + \frac{ESr^2}{\rho^2}(t_i - t_{i+1}) = 0,\\
&\frac{L'_i - L''_{i+1}}{2}\left(\omega\cos\omega - \frac{5}{2}\sin\omega\right)\\
&\quad + \frac{T'_i - T''_{i+1}}{2}\left(\omega\sin\omega + \frac{3}{2}\cos\omega\right) - \frac{M'_i + M''_{i+1}}{\rho}\sin\omega\\
&\quad + \frac{ESr^2}{\rho^3}\left[(x_i - x_{i+1})\cos\omega + (z_i + z_{i+1})\sin\omega - \rho(t_i - t_{i+1})\cos\omega\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les trois premières fournissent immédiatement $L_i - L_{i+1}$, $M_i - M_{i+1}$ et $T'_i + T'_{i+1}$; les trois dernières donnent $L_i + L_{i+1}$, $M_i + M_{i+1}$ et $T_i - T_{i+1}$.

Intégration d'un système d'équations aux différentielles totales;

PAR M. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

1. On peut étendre les procédés d'intégration qui conviennent aux équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants à des systèmes d'équations à une ou plusieurs variables indépendantes. C'est ce que je me propose de montrer en m'appuyant sur les principes généraux de la théorie des équations linéaires aux différentielles totales (*Annales de l'École Normale supérieure*, février 1882).

2. Considérons d'abord le système

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont l'intégration est bien connue, lorsqu'on suppose constants les coefficients $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

On pose

$$y_i = \Lambda_i e^{rx};$$

r satisfait à l'équation algébrique de degré n

$$F_x(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0,$$

appelée équation caractéristique.

Si les n racines sont distinctes, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont déterminés pour chaque racine (à un facteur constant près), et l'on peut former *un système fondamental de solutions*.

Supposons que r soit une racine multiple d'ordre k de l'équation $F_y(r) = 0$; on démontre que la racine r fournit les k solutions

$$(A_i e^{rx}), \quad \frac{\partial}{\partial r}(A_i e^{rx}), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}(A_i e^{rx}),$$

où l'on considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme des fonctions de r. Soient $\varphi_1(r), \varphi_2(r), \ldots, \varphi_n(r)$ ces fonctions; on peut encore former un système fondamental de solutions.

5. Cette dernière règle peut se trouver en défaut. Considérons les équations linéaires et homogènes auxquelles doivent satisfaire les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$, qui correspondent à une même racine r de l'équation caractéristique.

On a

$$\begin{aligned}
&A_1(a_{11} - r) + A_2 a_{12} + \ldots + A_n a_{1n} = 0,\\
&A_n a_{21} + A_2(a_{22} - r) + \ldots + A_n a_{2n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1 a_{n1} + A_2 a_{n2} \qquad + \ldots + A_n(a_{nn} - r) = 0.
\end{aligned}$$

Si r est une racine simple de l'équation caractéristique, tous les mineurs du premier ordre de $F_y(r)$ ne sont pas nuls en même temps. En effet, la dérivée

$$F'_y(r) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - r & 0 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & -1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} + \ldots$$

se compose linéairement au moyen des déterminants mineurs qui ont la diagonale commune avec le déterminant principal. Or $F'_y(r)$

n'est pas nul; donc tous ces déterminants ne peuvent être nuls à la fois. Soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

un de ces déterminants non nul; le système d'équations correspondant permettra de déterminer les valeurs proportionnelles des quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'une seule manière.

Supposons que tous les mineurs soient nuls jusqu'à ceux de l'ordre k exclusivement. L'un de ces déterminants d'ordre k non nul correspondra par exemple aux inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_{n-k}$. Pour satisfaire au système d'équations du premier degré, on prendra arbitrairement $A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \ldots, A_n$ et ensuite les $n-k$ équations correspondant au déterminant considéré détermineront les quantités A_1, $A_2, \ldots, A_{n-k}$.

En prenant la valeur de r qui annule $F_y(r)$ et ses déterminants mineurs jusqu'à ceux de l'ordre k, nous aurons pour toutes les valeurs de h inférieures à k

$$\varphi_i^h(r) = 0, \quad \varphi_i^{h-1}(r) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_i'(r) = 0, \quad \varphi_i(r) = 0,$$

c'est-à-dire que l'application de la règle deviendra illusoire.

Pour $h = k$ on aura une solution

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}(A_i e^{rx}) = e^{rx}\varphi_i^k(r).$$

Si r est une racine multiple d'ordre $k' > k$, on aura les $k' - k$ solutions linéairement indépendantes

$$e^{rx}\left[\varphi_i^h(r) + \frac{h}{1}\varphi_i^{h-1}(r)x + \ldots + \frac{h(h-1)\ldots(k-1)}{1.2\ldots(h-k)}\varphi_i^k(r)x^{h-k}\right],$$
$$[h = k,\ k+1,\ \ldots,\ (k'-1)].$$

On peut en outre former k groupes de valeurs de $A_{n-k+1}, \ldots, A_n$ telles que les k solutions $y_m = A_m e^{rx}$ correspondantes soient linéaire-

ment indépendantes. On aura donc un ensemble de k solutions linéairement indépendantes correspondant à la racine r d'un ordre k de multiplicité, et l'on pourra former un système fondamental de solutions.

Nous dirons que nous sommes dans *le cas d'exception* lorsque les singularités précédentes se présenteront.

On voit que les k solutions correspondant à une racine multiple r d'ordre k n'ont pas leurs formes toutes distinctes dans le cas d'exception.

4. Il sera utile pour la suite d'étudier l'intégration du système proposé en ramenant ce système à d'autres systèmes de plus en plus simples, comme nous allons le montrer. D'abord tout système de la forme

$$dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n)\, dx$$

admet au moins une solution de la forme $y_i = A_i e^{rx}$, et r satisfait à l'équation caractéristique $F_y(r) = 0$,

Supposons trouvée une solution $A_i e^{r'x}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Supposons que les coefficients différents de zéro soient $A_1, A_2, \ldots, A_s$; par conséquent $A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots, A_n$ sont nuls.

Posons $u_i = A_i e^{r'x}$, en convenant de remplacer $A_{s+1}, \ldots, A_n$ par l'unité, et $y_i = u_i q_i$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant de nouvelles inconnues. Nous aurons

$$u_i \frac{dq_i}{dx} = a_{i1} u_1 q_1 + \ldots + \left(a_{ii} u_i - \frac{du_i}{dx}\right) q_i + \ldots + a_{in} u_n q_n.$$

Or on a

$$\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} = r'.$$

Le système d'équation devient donc

$$\frac{dq_i}{dx} = a_{i1} \frac{u_1}{u_i} q_1 + \ldots + (a_{ii} - r') q_i + \ldots + a_{in} \frac{u_n}{u_i} q_n.$$

Ce système admet la solution

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 1,$$
$$q_{s+1} = q_{s+2} = \ldots = q_n = 0.$$

On a donc

$$a_{i1}\frac{u_1}{u_i}+\ldots+a_{is}\frac{u_s}{u_i}=0.$$

En tenant compte de ces relations, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dx}&=a_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots+a_{is}\frac{u_s}{u_i}(q_s-q_1)\\&\quad+a_{i,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_i}q_{s+1}+\ldots+a_{in}\frac{u_n}{u_i}q_n.\end{aligned}$$

Retranchons la première de ces équations des $s-1$ suivantes. Posons

$$q_h-q_1=z_h\quad\text{et}\quad q_{s+h}=z_{s+h},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dz_h}{dx}&=\left(a_{h2}\frac{u_2}{u_h}-a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots+\left(a_{hh}-r'-a_{1h}\frac{u_h}{u_1}\right)z_h+\ldots\\&\quad+\left(a_{h,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_h}-a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1}\right)z_{s+1}+\ldots+\left(a_{hn}\frac{u_n}{u_h}-a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n,\\&\qquad(h=2,3,\ldots,s),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{dz_{s+k}}{dx}&=a_{s+k,2}\frac{u_2}{u_{s+k}}z_2+\ldots+(a_{s+k,s+k}-r')z_{s+k}+\ldots+a_{s+k,n}\frac{u_n}{u_{s+k}}z_n,\\&\qquad(s+k=s+1,\ s+2,\ \ldots,\ n).\end{aligned}$$

Pour intégrer les systèmes en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et en $z_2, z_3, \ldots, z_n$, nous formerons leurs équations caractéristiques $F_q(r)=0$ et $F_z(r)=0$, car ces systèmes sont de même nature que le système proposé.

On a, pour le système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$$F_q(r)=\begin{vmatrix}a_{11}-r'-r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \cdots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}\frac{u_1}{u_n} & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \cdots & a_{nn}-r'-r\end{vmatrix}=0.$$

Or $\frac{u_p}{u_q} = \frac{A_p}{A_q}$. On a donc

$$F_q(r) = \begin{vmatrix} A_1(a_{11} - r' - r) & A_2 a_{12} & \dots & A_n a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_1 a_{n1} & A_2 a_{n2} & \dots & A_n(a_{nn} - r' - r) \end{vmatrix} = 0,$$

ou simplement

$$F_q(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r' - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation caractéristique du système primitif où r est remplacé par $r + r'$.

Prenons le système en $z_2, z_3, \dots, z_n$. Son équation caractéristique $F_z(r) = 0$ peut s'écrire en introduisant immédiatement une nouvelle ligne et une nouvelle colonne

$$rF_z(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{1s}\frac{u_s}{u_1} & a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ 0 & a_{22} - r' - a_{12}\frac{u_2}{u_1} - r & \dots & a_{2s}\frac{u_s}{u_2} - a_{1s}\frac{u_s}{u_1} & a_{2,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_2} - a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{2n}\frac{u_n}{u_2} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & a_{s2}\frac{u_2}{u_s} - a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{ss} - r' - a_{1s}\frac{u_s}{u_1} - r & a_{s,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_s} - a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{sn}\frac{u_n}{u_s} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ 0 & a_{s+1,2}\frac{u_2}{u_{s+1}} & \dots & a_{s+1,s}\frac{u_s}{u_{s+1}} & a_{s+1,s+1} - r' - r & \dots & a_{s+1,n}\frac{u_n}{u_{s+1}} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \dots & a_{ns}\frac{u_s}{u_n} & a_{n,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_n} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

Ajoutons la première ligne horizontale à chacune des $s - 1$ premières, il viendra

$$rF_z(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ . & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ r & a_{s2}\frac{u_2}{u_s} & \dots & a_{sn}\frac{u_n}{u_s} \\ 0 & a_{s+1,2}\frac{u_2}{u_{s+1}} & \dots & a_{s+1,n}\frac{u_n}{u_{s+1}} \\ . & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons maintenant que l'on a identiquement

$$(a_{11}-r')+a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{s1}\frac{u_1}{u_s}+\ldots+(a_{ss}-r')=0,$$

$$a_{s+1,1}\frac{u_1}{u_{s+1}}+\ldots+a_{s+1,s}\frac{u_s}{u_{s+1}}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}\frac{u_1}{u_n}+\ldots+a_{ns}\frac{u_s}{u_n}=0,$$

et ajoutons les s premières colonnes en tenant compte de ces relations, nous aurons

$$rF_z(r)=\begin{vmatrix} a_{11}-r-r' & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \cdots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}\frac{u_1}{u_n} & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \cdots & a_{nn}-r'-r \end{vmatrix}=0.$$

C'est l'équation caractéristique du système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Donc, quand on introduit la solution $r=0$ dans l'équation $F_z(r)=0$, on obtient l'équation $F_q(r)=0$, c'est-à-dire que, lorsqu'on connaît les racines de l'équation $F_y(r)=0$, on a, par un calcul très simple, les racines des équations $F_q(r)=0$ et $F_z(r)=0$.

Ajoutons que, si r' est une racine multiple d'ordre k de $F_y(r)=0$, zéro sera une racine multiple d'ordre $k-1$ de $F_z(r)=0$.

Aux équations en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ il faut joindre l'équation

$$\frac{dq_1}{dx}=a_{12}\frac{u_2}{u_1}z_2+\ldots+a_{1n}\frac{u_n}{u_1}z_n.$$

Cela posé, le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ a tout au moins une solution constante si r' est une racine multiple de $F_y(r)=0$, car l'équation $F_z(r)=0$ admettra alors la racine zéro.

On aura donc

$$\frac{dq_1}{dx}=C,$$

C étant une constante déterminée; on tire de là

$$q_1 = Cx + C_1,$$

C_1 étant une constante arbitraire. On peut remonter aux inconnues primitives et l'on aura

$$q_h = z_h + q_i = Cx + C_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$q_{s+k} = z_{s+k} = C_{s+k} \quad (s + k = s + 1, s + 2, \ldots, n),$$

les quantités $C_h - C_1$ étant des constantes dont les valeurs proportionnelles sont déterminées. On aura ensuite

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'x}(Cx + C_i),$$

en supposant maintenant A_{s+1}, A_{s+2}, ..., A_n identiquement nulles.

Supposons que l'on forme le système différentiel qui est au système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ ce que celui-ci est au système primitif. Soit k le degré de multiplicité de la racine r', et soit $k \geq 3$. La nouvelle équation caractéristique admettra encore la racine zéro.

On en tirera pour le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ une relation de la forme

$$z_i = D_i + D'_i x,$$

D_i et D'_i représentant des constantes.

Si nous convenons de représenter par $P^k(x)$ un polynôme entier et rationnel de degré k en x, nous aurons, après avoir intégré,

$$q_1 = P_1^2(x),$$

d'où

$$q_h = q_1 + z_h = P_h^2(x) \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$q_{s+k} = z_{s+k} = P_{s+k}^{(1)}(x) \quad (s + k = s + 1, s + 2, \ldots, n);$$

d'où enfin

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'x} P_i^2(x),$$

A_{s+1}, A_{s+2}, ..., A_n étant supposées identiquement nulles.

Le raisonnement se continuera de la même manière tant qu'on n'aura pas épuisé le degré k de la racine r'. Nous retrouvons donc les formes des intégrales données par la première méthode d'intégration.

Ajoutons une remarque importante. Soit

$$y_i = A_i e^{r'x}(\alpha_0^i x^m + \alpha_1^i x^{m-1} + \ldots + \alpha_m^i)$$

une solution; $y_i = A_i \alpha_0^i e^{r'x}$ est aussi une solution. Il en résulte que dans les solutions successives correspondant à une racine multiple r', les coefficients des plus hautes puissances sont différents de zéro en même temps. On remarque ce fait également dans la première méthode.

Il est évident qu'en ramenant le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à des systèmes de plus en plus simples par le procédé que nous venons d'indiquer, on arrivera à construire n solutions du système primitif en y_1, $y_2, \ldots, y_n$. Ces n solutions formeront *un système fondamental de solutions*.

5. Il peut être utile de changer l'équation caractéristique en une autre. On emploiera la substitution $y_i = u_i e^{\lambda x}$, λ étant une constante arbitraire. On aura

$$\frac{du_i}{dx} = a_{i1}u_1 + \ldots + (a_{ii} - \lambda)u_i + \ldots + a_{in}u_n.$$

L'équation caractéristique $F_n(r) = 0$ a pour racines les racines de $F_\lambda(r) = 0$ diminuées de λ.

On remarquera que, si la racine r' correspond à un cas d'exception, la racine $r' - \lambda$ correspondra aussi à un cas d'exception, et réciproquement.

6. Pour que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ présente le cas d'exception pour la racine zéro, il faut que le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ présente le cas d'exception pour la racine r'.

En effet, supposons que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ offre le cas d'exception pour la racine zéro. Il existera au moins deux solutions linéairement indépendantes dont les éléments seront constants. Entre

ces deux solutions

$$z_i = \alpha_i, \quad z_i = \alpha'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

il ne pourra exister aucune relation à coefficients constants de la forme

$$\omega\alpha_i + \omega'\alpha'_i = 0.$$

Introduisons les deux symboles α_1 et α'_1 en leur donnant pour valeur zéro. Aux deux solutions considérées correspondent deux solutions dans le système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et deux solutions dans le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$q_i = \alpha x + \alpha_i + C, \qquad q'_i = \alpha' x + \alpha'_i + C',$$
$$y_i = A_i e^{r'x}(\alpha x + \alpha_i + C), \quad y'_i = A_i e^{r'x}(\alpha' x + \alpha'_i + C'),$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

Choisissons deux nombres β et β', tels que $\alpha\beta + \alpha'\beta' = 0$. La solution $\beta y_i + \beta' y'_i = A_i e^{r'x}(\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta')$ sera de la même forme que la solution $A_i e^{r'x}$. Il n'y aura entre ces deux solutions aucune relation linéaire à coefficients constants; car les quantités

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta'$$

devraient être toutes égales. On aurait

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta' = \beta\alpha_1 + \beta'\alpha'_1 + C\beta + C'\beta = C\beta + C'\beta'$$

et par suite

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i = 0,$$

ce qui est impossible par hypothèse.

Donc le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admettrait au moins deux solutions linéairement indépendantes de la forme $y_i = A_i e^{r'x}, y'_i = A_i e^{r'x}$, c'est-à-dire que la racine r' correspondrait à un cas d'exception.

7. S'il n'y a pas exception pour la racine r de $F_1(r) = 0$, la constante $C = \frac{dq_1}{dx}$ ne sera pas nulle. En effet, on aurait la solution

$y'_i = A_i C_i e^{r'x}$, si C était nul. Elle ne se confondra avec la solution $y_i = A_i e^{rx}$ que si l'on a

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_k.$$

On aurait alors

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = C_1 = C_2 = \ldots = C_k \quad \text{et} \quad q_{k+1} = q_{k+2} = \ldots = q_n = 0$$

comme solution du système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On en tirerait

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_k = 0 \quad \text{et} \quad z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$$

comme solution du système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$. Or on n'a pas pris une solution en $z_2, \ldots, z_n$, dont tous les éléments soient nuls pour former la solution y'_i. Donc cette solution y'_i, devant être linéairement indépendante de la solution y_i, ne peut exister, puisqu'il n'y a pas exception, et C n'est pas nul.

8. Considérons maintenant le système d'équations aux différentielles totales

$$(1)\quad \begin{cases} dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)\,dx_p \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

où les lettres $a, b, \ldots, l$ représentent des constantes. Nous supposons les conditions d'intégrabilité identiquement satisfaites en vertu des équations proposées.

Si les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ se déplacent respectivement dans leurs plans, il existe des fonctions intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uniformes dans tout le plan, satisfaisant aux équations proposées. Imaginons un système fondamental de solutions. Il suffit, pour le déterminer, de fixer un déterminant de valeurs initiales différent de zéro. Pour avoir les valeurs des solutions en *un point* $(x_1 x_2 \ldots x_p)$ quelconque, on pourra arriver en ce point avec un choix de chemins et de marches absolument arbitraires. Supposons donc que la variable x_1 décrive son chemin, les autres variables indépendantes $x_2, \ldots, x_p$ restant à leurs positions initiales. Les éléments d'une solution quel-

conque satisferont, dans cette hypothese, aux équations

$$(2)\qquad dy_i = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n,$$

à une seule variable indépendante.

Soit r'_1 une racine de l'équation caractéristique $F_1(r_1) = 0$ relative aux équations (2). On aura une solution de la forme

$$y_i = A\varphi_i(r'_1) e^{r'_1 x_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$\varphi_i(r'_1)$ est un nombre que donne le calcul quand on connait r'_1; A est une quantité indépendante de x_1. Si maintenant on fait varier les autres variables $x_2, x_3, \ldots, x_p$, A variera seule et sera une fonction de ces variables.

Exprimons alors que $y_i = A\varphi_i(r'_1)e^{r'_1 x_1}$ satisfait aux équations (2). Nous aurons

$$\begin{aligned} dy_i &= A r'_1 \varphi_i(r'_1) e^{r'_1 x_1} dx_1 + \varphi_i(r'_1) e^{r'_1 x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p} dx_p\right) \\ &= A e^{r'_1 x_1}\{[a_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + a_{in}\varphi_n(r'_1)] dx_1 \\ &\qquad + [b_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + b_{in}\varphi_n(r'_1)] dx_2 + \ldots \\ &\qquad + [l_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + l_{in}\varphi_n(r'_1)] dx_p\}. \end{aligned}$$

Ces équations se ramènent, à cause du choix de r'_1, à la forme

$$\begin{aligned} &\varphi_i(r'_1)\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p} dx_p\right) \\ &\quad = A\{[b_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + b_{in}\varphi_n(r'_1)] dx_2 + \ldots \\ &\qquad + [l_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + l_{in}\varphi_n(r'_1)] dx_p\}, \end{aligned}$$

et, comme la fonction A doit exister, on aura

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p} dx_p\right) = r'_2 dx_2 + \ldots + r'_p dx_p,$$

$r'_2, \ldots, r'_p$ étant des constantes déterminées par le calcul précédent, d'où l'on tirera

$$A = B e^{r'_2 x_2 + \ldots + r'_p x_p},$$

B étant une constante arbitraire.

Ainsi les équations (1) admettent au moins une solution de la forme

$$y_i = A_i e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p},$$

A_1, A_2, ..., A_n étant des constantes dont les rapports sont donnés par le calcul.

En exprimant ce fait, nous trouverons les relations qui doivent nécessairement exister entre r'_1, r'_2, ..., r'_p. Nous aurons

$$\begin{aligned} dy_i &= A_i e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p}(r'_1 dx_1 + \ldots + r'_p dx_p) \\ &= (A_1 a_{i1} + \ldots + A_n a_{in}) e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p} dx_1 + \ldots \\ &+ (A_1 l_{i1} + \ldots + A_n l_{in}) e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p} dx_p, \end{aligned}$$

équations qui entraînent les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A_1 a_{i1} + \ldots + A_i(a_{ii} - r'_1) + \ldots + A_n a_{in} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 l_{i1} + \ldots + A_i(l_{ii} - r'_p) + \ldots + A_n l_{in} = 0 \end{array}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De ces équations du premier degré, il résulte d'abord que chaque nombre r'_k doit satisfaire à une équation de la forme

$$F_k(r_k) = \begin{vmatrix} g_{11} - r_k & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r_k & \ldots & g_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nn} - r_k \end{vmatrix} = 0,$$

que nous appellerons une équation caractéristique.

Ensuite ces systèmes doivent être satisfaits par un même système de valeurs proportionnelles de A_1, A_2, ..., A_n. Supposons expressément que r'_1, r'_2, ..., r'_p n'annulent pas respectivement tous les mineurs du premier ordre de $F_1(r_1)$, $F_2(r_2)$, ..., $F_p(r_p)$. Alors les équations du premier degré admettront un système unique de solutions communes A_1, A_2, ..., A_n.

En comparant ces équations, on en tirera

$$\frac{r'_1}{A_1 a_{11} + \ldots + A_n a_{1n}} = \frac{r'_2}{A_1 b_{11} + \ldots + A_n b_{1n}} = \ldots = \frac{r'_p}{A_1 l_{11} + \ldots + A_n l_{1n}}.$$

On peut toujours supposer qu'aucun des nombres $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ n'est nul; car, si l'on pose $y_i = u_i e^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p}$, le système (1) deviendra

$$du_i = [a_{i1}u_1 + \ldots + (a_{ii} - \lambda_1)u_i + \ldots + a_{in}u_n]\,dx_1 + \ldots$$
$$+ [l_{i1}u_1 + \ldots + (l_{ii} - \lambda_p)u_i + \ldots + l_{in}u_n]\,dx_p,$$

et les équations caractéristiques de ce nouveau système n'admettront plus de racines nulles, si l'on choisit convenablement $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

La racine r'_1 n'étant pas nulle, on peut toujours trouver une quantité $A_1 a_{i1} + \ldots + A_n a_{in} = A_i r'_1$ différente de zéro, car tous les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne sont pas nuls à cause des premières hypothèses. On voit alors que, $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ n'étant pas nuls non plus, on aura, à cause des équations précédentes,

$$A_1 b_{i1} + \ldots + A_n b_{in} \neq 0, \quad \ldots, \quad A_1 l_{i1} + \ldots + A_n l_{in} \neq 0.$$

Donc à une racine r'_1 correspondent des racines $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ déterminées. Réciproquement, à l'une quelconque de ces racines correspondent toutes les autres et seulement celles-là.

Par la transformation inverse à celle qu'on a faite, on peut rétablir les racines nulles qu'on avait écartées, et le théorème est vrai, même dans le cas où les équations caractéristiques admettent des racines nulles. Mais, si l'on a $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 0, \ldots, F_p(0) = 0$, il faut que les mineurs du premier ordre de chaque déterminant $F_1(0)$, $F_2(0), \ldots, F_p(0)$ ne soient pas tous nuls à la fois.

Quand les conditions précédentes seront réalisées, nous dirons que les nombres $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ *se correspondent*.

Lorsque les mineurs du premier ordre peuvent être tous nuls à la fois, le théorème peut n'être plus vrai. En voici un exemple simple : prenons le système

$$dy_1 = ay_1\,dx_1 + (b_{11}y_1 + b_{12}y_2)\,dx_2,$$
$$dy_2 = ay_2\,dx_1 + (b_{21}y_1 + b_{22}y_2)\,dx_2.$$

Les conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites. Si l'on pose

$$y_1 = A_1 e^{ax_1}, \quad y_2 = A_2 e^{ax_2},$$

A_1 et A_2 seront déterminées par les équations

$$\frac{dA_1}{dx_2} = b_{11}A_1 + b_{12}A_2,$$

$$\frac{dA_2}{dx_2} = b_{21}A_1 + b_{22}A_2.$$

On en tirera deux solutions linéairement indépendantes

$$A_{11} = B_{11}e^{r_1 x_2},$$

$$A_{21} = B_{21}e^{r_1 x_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{12} = B_{12}e^{r_2 x_2},$$

$$A_{22} = B_{22}e^{r_2 x_2},$$

et, pour le système primitif, on aura les intégrales générales

$$y_1 = e^{a x_1}(\lambda B_{11}e^{r_1 x_2} + \mu B_{12}e^{r_2 x_2}),$$

$$y_2 = e^{a x_1}(\lambda B_{21}e^{r_1 x_2} + \mu B_{22}e^{r_2 x_2});$$

or la même racine a se trouve ainsi associée à deux racines différentes r_1 et r_2. Mais, si l'on considère l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a - r_1 & 0 \\ 0 & a - r_1 \end{vmatrix} = 0,$$

la racine $r_1 = a$ annule tous les mineurs du premier ordre.

Dès maintenant on peut donner la règle pour intégrer le système (1) dans le cas où les équations caractéristiques ont toutes leurs racines distinctes.

On déterminera les racines de l'une des équations caractéristiques

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r_k & \dots & g_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} - r_k \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations du premier degré

$$A_1 g_{i1} + \dots + A_i(g_{ii} - r_k) + \dots + A_n g_{in} = 0$$

admettront une solution déterminée pour les valeurs proportionnelles de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Les racines des autres équations caractéristiques seront déterminées successivement par l'une des séries de rapports

$$\frac{r'_1}{A_1 a_{i1}+\ldots+A_n a_{in}}=\ldots=\frac{r'_k}{A_1 g_{i1}+\ldots+A_n g_{in}}=\ldots=\frac{r'_p}{A_1 l_{i1}+\ldots+A_n l_{in}},$$

où r'_k représente successivement toutes les racines de $F_k(r_k)=0$. On pourra former ainsi n solutions

$$y_{ik}=A_{ik}e^{r'_{1k}x_1+\ldots+r'_{pk}x_p} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$r'_{1k}, r'_{2k}, \ldots, r'_{pk}$ étant des racines correspondantes, et ces n solutions formeront un système fondamental.

9. Considérons maintenant le cas le plus général. Nous pourrons toujours former une première solution $u_i=A_i e^{r_1 x_1+\ldots+r_p x_p}$ des équations (1).

Posons $y_i=u_i q_i$, nous aurons

$$\begin{aligned}
dq_i=\Big[&a_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots\\
&+\left(a_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)(q_i-q_1)+\ldots+a_{in}\frac{u_n}{u_i}(q_n-q_1)\Big]dx_1+\ldots\\
+\Big[&l_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots\\
&+\left(l_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right)(q_i-q_1)+\ldots+l_{in}\frac{u_n}{u_i}(q_n-q_1)\Big]dx_p,
\end{aligned}$$

et, en posant $z_h=q_h-q_1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
dz_i=\Big[&\left(a_{i2}\frac{u_2}{u_i}-a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots\\
&+\left(a_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}-a_{1i}\frac{u_i}{u_1}\right)z_i+\ldots+\left(a_{in}\frac{u_n}{u_i}-a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n\Big]dx_1+\ldots\\
+\Big[&\left(l_{i2}\frac{u_2}{u_i}-l_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots\\
&+\left(l_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_p}-l_{1i}\frac{u_i}{u_1}\right)z_i+\ldots+\left(l_{in}\frac{u_n}{u_i}-l_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n\Big]dx_p.
\end{aligned}$$

Ce système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ est de même forme que le système (1). Il admettra donc au moins une solution de la forme $B_i e^{\ldots}$. Cette solution permettra de trouver une solution du système en q_1, $q_2, \ldots, q_n$ et, par suite, une solution du système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

En considérant le système qui est au système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ ce que celui-ci est au système (1), on formera, en remontant encore dans les calculs, une troisième solution du système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et ainsi de suite.

On peut démontrer que les n solutions qu'on obtiendra pour le système primitif formeront un système fondamental de solutions. Pour cela, on appliquera le raisonnement des nos **16** et **17** de la théorie générale.

Nous avons donc là une méthode générale d'intégration.

10. Il est intéressant de considérer les solutions qui correspondent à un groupe de racines *correspondantes*, lorsque l'une des racines, r_1 par exemple, est une racine multiple.

Formons le système en $z_2, \ldots, z_n$, et soient

$$F_{1z}(r_1) = 0, \quad F_{2z}(r_2) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(r_p) = 0$$

ses équations caractéristiques : r'_1 étant racine multiple de $F_{1z}(r_1) = 0$, zéro sera racine de $F_{1z}(r_1) = 0$. On aura donc une solution de la forme

$$z_i = B_i e^{r_2 x_2 + \ldots + r_p x_p},$$

d'où l'on tirera

$$dq_1 = e^{r_2 x_2 + \ldots + r_p x_p}(\alpha\, dx_1 + \ldots + \lambda\, dx_p),$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des constantes, et par suite

$$q_1 = A e^{r_2 x_2 + \ldots + r_p x_p},$$

d'où

$$q_i = q_1 + z_i = A_i e^{r_2 x_2 + \ldots + r_p x_p}$$

et

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_p x_p}.$$

Or à la racine r'_1 ne peuvent correspondre que $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$: donc on a

$$r''_2 = r''_3 = \ldots = r''_p = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$F_{2z}(0) = 0, \quad F_{3z}(0) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(0) = 0.$$

Il faut donc que $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ soient au moins racines doubles de

$$F_{2z}(r_2) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(r_p) = 0.$$

En passant au système auxiliaire qui vient après le système en $z_2, \ldots, z_n$, on verrait de même que, r'_1 étant racine triple, $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$, sont de même racines triples de leurs équations respectives.

En général, soit k le degré de multiplicité de la racine r'_1; on démontrera que les racines correspondantes $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ sont des racines du même ordre k de multiplicité de leurs équations caractéristiques respectives.

Il résulte de là que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ et les $k - 2$ systèmes auxiliaires suivants admettront des solutions à éléments constants.

Soit d'abord

$$dq_1 = H_1\, dx_1 + H_2\, dx_2 + \ldots + H_p\, dx_p.$$

$H_1, H_2, \ldots, H_p$ seront des constantes.

On tirera de là

$$q_1 = A_{01} + A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + \ldots + A_{p1} x_p,$$

d'où

$$q_i = q_1 + z_i = A_{0i} + A_{1i} x_1 + \ldots + A_{pi} x_p$$

et, par suite,

$$y_i = u_i q_i = (A_{0i} + A_{1i} x_1 + \ldots + A_{pi} x_p) A_i e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p}.$$

Ensuite, si $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ sont au moins des racines triples, le système auxiliaire qui vient après le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ donnera

$$z_i = P_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

en représentant par P^k un polynôme de degré k en $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On tirera de là

$$q_i = P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

$$y_i = P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, e^{r_1 x_1 + \ldots + r_p x_p}.$$

Le raisonnement se continue de la même manière tant qu'on n'a pas épuisé le degré k de multiplicité des racines $r_1, r_2, \ldots, r_p$ des équations caractéristiques.

Donc, lorsque des racines $r_1, r_2, \ldots, r_p$ *se correspondent*, elles sont racines de leurs équations caractéristiques respectives au même degré k de multiplicité, et l'on peut former un groupe de k solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y_{im} = P_{im}^h(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, e^{r_1 x_1 + \ldots + r_p x_p}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, k; \quad h = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

où $P_{im}^h(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ représente un polynôme entier de degré h à coefficients constants.

11. L'intégration du système d'équations (1) conduit facilement à l'intégration du système d'équations

$$(3) \quad \begin{cases} dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) \dfrac{dx_1}{x_1} + \ldots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) \dfrac{dx_p}{x_p} \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$a, b, \ldots, l$ représentant toujours des constantes.

Posons en effet

$$x_h = e^{z_h},$$

nous aurons

$$dx_h = x_h\, dz_h,$$

d'où

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_h} = \frac{\partial y_i}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial z_h} = x_h \frac{\partial y_i}{\partial x_h}.$$

Nous aurons donc

$$dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n)\, dz_1 + \ldots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n)\, dz_p,$$

équation du genre de celles que nous venons d'étudier.

Les solutions seront ici de la forme

$$P^{\mu}(lg x_1, lg x_2, \ldots, lg x_p) x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_p^{r_p},$$

P^{μ} représentant un polynôme entier et rationnel de degré μ.

Plusieurs systèmes se ramènent au précédent. Par exemple, on déduit un système intéressant du système (3) en posant $y_i = u_i x^{h_i}$, et l'on peut réciproquement passer de ce système au système (3).

12. En résumé, l'intégration des systèmes d'équations de la forme

$$dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) \frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \mu_1} + \ldots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) \frac{dx_p}{\lambda_p x_1 + \mu_p},$$

où $a, b, \ldots, l, \lambda, \mu$ représentent des constantes, se ramène toujours à l'intégration d'un système de la forme

$$dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) dx_1 + \ldots + (b_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) dx_p.$$

L'intégration de ce système dépend essentiellement dans la pratique de la résolution d'une seule équation algébrique de degré n.

Sur une formule de M. Tisserand *et sur les fonctions hypergéométriques de deux variables;*

Par M. P. APPELL.

1. Dans deux Communications faites à l'Académie des Sciences les 15 et 22 octobre 1883, M. Tisserand a été conduit à la question suivante [1] :

Soit $P^N(p, z)$ le polynôme de degré N en z qui forme le coefficient de θ^N dans le développement

$$(1) \qquad \frac{1}{(1-2\theta z+\theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_{N=0}^{N=\infty} \theta^N P^N(p, z),$$

effectué suivant les puissances positives de θ; il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynôme $P^N(p, z)$ suivant les cosinus des multiples de x et y quand on pose

$$(2) \qquad z = \mu \cos x + \nu \cos y.$$

Ce développement est de la forme

$$(3) \qquad P^N(p, z) = 4\sum B_{i,j}^{N} \cos ix \cos jy,$$

[1] Voir à ce sujet un Mémoire de M. Radau *Sur le développement de l'expression* $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-k}$ (*Annales de l'Observatoire. Mémoires*, t. XVIII, 1884).

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives de i et j pour lesquelles la différence

$$\mathrm{N} - i - j$$

est un nombre positif pair, avec cette convention qu'il faut remplacer le facteur 4 par 2 lorsque l'un des indices i ou j est nul, et par 1 quand ils sont nuls tous les deux. La question proposée est alors de trouver l'expression générale de $\mathrm{B}_{i,j}^{\mathrm{N},p}$ en fonction de N, p, i, j, λ et μ. Comme le montre M. Tisserand (*loc. cit.*), ce problème est complètement résolu pour les valeurs

$$p = 2, \quad p = 3;$$

et de plus, dans le cas où p est de la forme $2q+3$, q entier, le coefficient $\mathrm{B}_{i,i}^{2n,p}$ s'exprime à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre.

En calculant directement le coefficient général $\mathrm{B}_{i,j}^{\mathrm{N},p}$, j'ai fait voir (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 novembre 1883) que, quels que soient le nombre p et les variables μ et ν, ce coefficient peut être exprimé à l'aide d'une des fonctions hypergéométriques de deux variables dont j'ai fait une étude détaillée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1882. D'après les notations employées dans ce Mémoire, désignons par (λ, n) le produit

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1),$$

où n est un entier positif, en convenant que $(\lambda, 0)$ est égal à l'unité, et posons

$$\mathrm{F}_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

L'expression du coefficient $\mathrm{B}_{i,j}^{\mathrm{N},p}$ est alors

$$(1)\quad \mathrm{B}_{i,j}^{\mathrm{N},p} = \mathrm{C}_{i,j}^{\mathrm{N},p} \mu^i \nu^j \mathrm{F}_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{\mathrm{N}+i-j}{2}, \frac{i+j-\mathrm{N}}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

où le coefficient $C^{N,p}_{i,j}$ est indépendant de μ et ν, et a pour valeur

$$(4)\qquad C^{N,p}_{i,j} = (-1)^{\frac{N-i-j}{2}} \frac{\left(\frac{p-1}{2}, \frac{N+i+j}{2}\right)}{\left(1, \frac{N-i-j}{2}\right)(1,i)(1,j)}.$$

Le développement de la fonction F_4, qui figure dans l'expression (4), s'arrête de lui-même, car le second élément $\frac{i+j-N}{2}$ est un entier négatif, comme il résulte de ce que nous avons dit à propos de la formule (3).

Dans la séance du 19 novembre 1883, M. Radau a communiqué à l'Académie des Sciences une méthode permettant d'établir rapidement la formule (4).

En considérant μ et ν comme deux variables indépendantes, on conclut des formules précédentes une propriété des coefficients $B^{N}_{i,j}$ qui me paraît digne d'être signalée.

D'après les propositions démontrées dans le Chapitre IV de mon Mémoire *Sur les séries hypergéométriques de deux variables* précédemment cité [1], les deux fonctions

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

$$z_1 = F_4\left(\alpha - \lambda, \delta + \lambda, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

possèdent cette propriété que l'intégrale double

$$\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy.$$

---

(1) On peut remarquer que l'équation (34) de ce Chapitre IV est vérifiée non seulement par

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

mais encore par

$$z = F_4(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', ax, by),$$

les constantes a et b étant assujetties à la *seule condition*

$$a + b = 1.$$

étendue aux valeurs réelles de x et y pour lesquelles

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 1 - x - y \geq 0,$$

est *nulle* lorsqu'elle est finie, à condition que le produit $\lambda(\delta - \alpha + \lambda)$ soit *différent* de zéro. Faisant alors

$$x = 2\mu^2, \quad y = 2\nu^2, \quad \alpha = \frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \quad \delta = \frac{i+j-N}{2},$$
$$\gamma = i+1, \quad \gamma' = j+1, \quad \lambda = \frac{N-N_1}{2},$$

où N_1 est un entier positif de même parité que N, on a

$$z = F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$
$$z_1 = F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N_1+i+j}{2}, \frac{i+j-N_1}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

et l'intégrale double précédente devient

$$(5) \qquad \int\int \mu^{2i+1}\nu^{2j+1}(1 - 2\mu^2 - 2\nu^2)^{\frac{p-1}{2}-2} z z_1 \, d\mu \, d\nu,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs de μ et ν pour lesquelles

$$(5') \qquad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \quad 1 - 2\mu^2 - 2\nu^2 \geq 0.$$

Comme z et z_1 sont des polynômes, cette intégrale est finie quand $\frac{p-1}{2} - 1$ est positif, et par suite elle est *nulle* quand $N - N_1$ est différent de zéro, car le facteur $(\delta - \alpha + \lambda)$ est ici $-\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N_1}{2}\right)$ et ne peut pas s'annuler. Donc, en vertu de l'expression (4) du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, l'intégrale double

$$\int\int \mu\nu(1 - 2\mu^2 - 2\nu^2)^{\frac{p-1}{2}-2} B_{i,j}^{N,p} B_{i,j}^{N_1,p} \, d\mu \, d\nu$$

$\left(\text{où } \frac{p-1}{2} - 1 > 0\right)$ étendue aux limites (5′), est nulle tant que N est différent de N_1.

La formule (4) donne l'expression générale du coefficient $B_{i,j}^{\lambda,p}$ quelles que soient les constantes μ et ν; mais, dans l'application à la Mécanique céleste que M. Tisserand avait en vue, μ et ν ne sont pas indépendantes et l'on a

$$(6) \qquad \mu = \cos^2\frac{J}{2}, \quad \nu = \sin^2\frac{J}{2},$$

d'où

$$(6') \qquad \mu + \nu = 1.$$

Il est donc important de rechercher quelles simplifications cette relation entre μ et ν apporte à l'expression du coefficient $B_{i,j}^{\lambda,p}$.

Dans les cas signalés par M. Tisserand, cette relation permet de réduire le coefficient $B_{i,j}^{\lambda,p}$ à un polynôme hypergéométrique d'une seule variable du premier ou du second ordre, et, dans ces cas, le coefficient $B_{i,j}^{\lambda,p}$ considéré comme fonction de J satisfait à une équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième ordre. M. Callandreau a montré (*Comptes rendus*, séance du 26 novembre 1883) que, dans le cas général, le coefficient $B_{i,j}^{\lambda,p}$, considéré comme fonction de J, vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre qu'il n'a d'ailleurs pas formée complètement. Au moment où M. Callandreau a publié cette Note, j'étais de mon côté, en suivant les conseils de M. Tisserand, arrivé à ce même résultat. Je vais reprendre ici le calcul de M. Callandreau et former cette équation du troisième ordre, après avoir fait quelques réflexions générales sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles.

2. Soit z une fonction des deux variables indépendantes x et y satisfaisant à deux équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles de la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z, \end{cases}$$

qui admettent quatre intégrales communes linéairement indépendantes; dans ces équations p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles

premières et secondes de z et les coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ sont des fonctions de x et y [1]. Les équations (7) ayant quatre intégrales communes, le déterminant $1 - a_1 b_1$ n'est pas nul identiquement; alors, en dérivant la première de ces équations par rapport à y, la deuxième par rapport à x et remplaçant $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, on obtient deux équations du premier degré en $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on peut tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est $1 - a_1 b_1$, que l'on suppose différent de zéro. A l'aide des équations (7), on pourra mettre les expressions trouvées pour $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sous la forme

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z, \end{aligned} \right.$$

α_i et β_i étant des fonctions connues de x et y. La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

est supposée remplie identiquement, quels que soient x, y, z, p, q, s.

Si l'on établit une relation entre y et x

$$(9) \qquad y = f(x),$$

l'intégrale générale z des équations (7) devient une fonction de x seulement, et cette fonction z de x satisfait en général à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; mais, pour certaines déterminations spéciales de la fonction $f(x)$, cette fonction z de x pourra satisfaire à une équation différentielle du troisième ou même du second ordre.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, p. 182, année 1882.

Voici comment on obtiendra ces déterminations de $f(x)$. On a, puisque z dépend de x directement et par l'intermédiaire de y, d'après la relation (9),

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r + 2sy' + ty'^2 + qy'',$$

y' et y'' désignant les dérivées de y par rapport à x tirées de la relation (9); en vertu des équations (7), ces deux expressions deviennent

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx^2} = {} & s(a_1 + 2y' + b_1 y'^2) + p(a_2 + b_2 y'^2) \\ & + q(a_3 + b_3 y'^2 + y'') + z(a_4 + b_4 y'^2).\end{aligned}$$

Donc la fonction z de x vérifiera une équation différentielle linéaire du second ordre, si l'on peut trouver une fonction y de x remplissant les *deux conditions*

$$(10) \qquad \begin{cases} a_1 + 2y' + b_1 y'^2 = 0, \\ a_3 + b_3 y'^2 + y'' = (a_2 + b_2 y'^2)\, y'. \end{cases}$$

Il pourra ne pas exister de fonction y vérifiant ces deux équations; on s'en assurera de la façon suivante : En résolvant ces équations (10) par rapport à y' et y'', on obtient des expressions de la forme

$$(10') \qquad y' = \varphi(x, y), \quad y'' = \psi(x, y);$$

d'où l'on tire l'équation

$$(10'') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\varphi(x, y) = \psi(x, y).$$

Cette équation (10'') définit y comme fonction de x; pour que cette fonction satisfasse à la question, il faudra et il suffira que sa dérivée

soit $\varphi(x, y)$. Il peut arriver que cette équation $(10'')$ soit identique en x et y; dans ce cas toute intégrale de la première des équations (10) sera une solution du problème.

Voici maintenant comment on obtiendra les déterminations de la fonction $f(x)$, équation (9), pour lesquelles z vérifie une équation du troisième ordre. Nous avons trouvé

$$\frac{dz}{dx} = p + qy', \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = c_1 s + c_2 p + c_3 q + c_4 z,$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des coefficients qui viennent d'être calculés et qui contiennent y' et y''. En prenant encore une fois la dérivée par rapport à x, on aura

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = c_1\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y'\right) + s\left(\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_1}{\partial y} y' + \frac{\partial c_1}{\partial y'} y''\right) + \ldots,$$

et, à l'aide des équations (7) et (8), on pourra mettre cette expression sous la forme

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = g_1 s + g_2 p + g_3 q + g_4 z,$$

les coefficients g_1, g_2, g_3, g_4 contenant y', y'' et y'''.

Pour qu'il existe une équation linéaire de troisième ordre à laquelle satisfasse z, il faut et il suffit que l'on puisse éliminer p, q, s entre ces trois relations donnant $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^3 z}{dx^3}$; par suite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & y' \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui est une équation différentielle du troisième ordre donnant y en x.

5. Revenons maintenant au problème particulier qui nous occupe. La fonction

$$z = F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$$

vérifie les deux équations différentielles simultanées

$$(11)\quad \begin{cases} x(1-x^2)r - y^2t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y^2)t - x^2r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles nous ferons, pour abréger,

$$\alpha+\beta+1 = A, \quad \alpha\beta = B.$$

D'après les relations (6), on voit que la fonction F_4, qui figure dans l'expression (4) du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, est de la forme

$$(12)\qquad z = F_4\left(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \cos^4\frac{J}{2}, \sin^4\frac{J}{2}\right),$$

où

$$(13)\quad \alpha = \frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \quad \beta = \frac{i+j-N}{2}, \quad \gamma = i+1, \quad \gamma' = j+1,$$

et, par suite,

$$(13')\quad A = \frac{p+1}{2} + i + j, \quad B = \left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}\right)\left(\frac{i+j-N}{2}\right).$$

Nous allons donc faire, dans les équations précédentes (11),

$$(14)\qquad x = \cos^4\frac{J}{2}, \quad y = \sin^4\frac{J}{2}, \quad \sin^2\frac{J}{2} = \nu,$$

et en déduire une équation différentielle linéaire à laquelle satisfait z considéré comme fonction de J d'après l'équation (12).

Si l'on remplace, dans les équations (11), les variables x et y par leurs expressions (14), ces équations deviennent

$$(15)\quad \begin{cases} \cos^4\frac{J}{2}\left(1-\cos^4\frac{J}{2}\right)r - \sin^8\frac{J}{2}t - 2\sin^4\frac{J}{2}\cos^4\frac{J}{2}s + \left(\gamma - A\cos^4\frac{J}{2}\right)p - A\sin^4\frac{J}{2}q - Bz = 0, \\ \sin^4\frac{J}{2}\left(1-\sin^4\frac{J}{2}\right)t - \cos^8\frac{J}{2}r - 2\sin^4\frac{J}{2}\cos^4\frac{J}{2}s + \left(\gamma' - A\sin^4\frac{J}{2}\right)q - A\cos^4\frac{J}{2}p - Bz = 0. \end{cases}$$

On en conclut, en retranchant membre à membre,

$$(16)\qquad r\cos^4\frac{J}{2} - t\sin^4\frac{J}{2} = \gamma' q - \gamma p;$$

puis, multipliant la première par $\dfrac{1}{\sin^2\frac{J}{2}}$, la deuxième par $\dfrac{1}{\cos^2\frac{J}{2}}$ et ajoutant,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & r\cos^4\frac{J}{2} - 2s\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2} + t\sin^4\frac{J}{2} \\ & \quad = \frac{p}{\sin^2\frac{J}{2}}\left(A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma\right) + \frac{q}{\cos^2\frac{J}{2}}\left(A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma'\right) + \frac{Bz}{\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Ceci posé, on a, puisque $\sin^2\frac{J}{2} = \nu$,

$$(18)\qquad \frac{dz}{d\nu} = 2\left(q\sin^2\frac{J}{2} - p\cos^2\frac{J}{2}\right),$$

$$(19)\qquad \frac{d^2z}{d\nu^2} = 4\left(r\cos^4\frac{J}{2} - 2s\sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2} + t\sin^4\frac{J}{2}\right) + 2(p+q),$$

et, par conséquent, d'après l'équation (17),

$$(19')\quad \left\{\begin{aligned} & \sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}\frac{d^2z}{d\nu^2} \\ & \quad = 4p\cos^2\frac{J}{2}\left(A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2}\right) \\ & \qquad + 4q\sin^2\frac{J}{2}\left(A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma' + \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2}\right) + 4Bz. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, introduisons la somme et la différence des coefficients de $4p\cos^2\frac{J}{2}$ et $4q\sin^2\frac{J}{2}$:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \eta &= A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2} + A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma' + \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2} = A - \gamma - \gamma' + \frac{1}{2}, \\ \Theta &= A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2} - A\sin^2\frac{J}{2} + \gamma' - \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2} = \left(A - \frac{1}{2}\right)\cos J - \gamma + \gamma'. \end{aligned}\right.$$

Alors

$$A\cos^2\frac{J}{2} - \gamma + \frac{1}{2}\sin^2\frac{J}{2} = \frac{\eta - \Theta}{2},$$

$$A\sin^2\frac{J}{2} - \gamma' + \frac{1}{2}\cos^2\frac{J}{2} = \frac{\eta + \Theta}{2},$$

et l'équation (19') devient

$$(19'')\qquad \left\{\begin{aligned} \sin^2\frac{J}{2}\cos^2\frac{J}{2}\,\frac{d^2z}{d\nu^2} = 2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2} + q\sin^2\frac{J}{2}\right)\\ + 2\Theta\left(p\cos^2\frac{J}{2} - q\sin^2\frac{J}{2}\right) + 4Bz\end{aligned}\right.$$

ou enfin, d'après (18),

$$(21)\qquad \nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2} + \Theta\frac{dz}{d\nu} - 4Bz = 2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2} + q\sin^2\frac{J}{2}\right).$$

Le facteur η qui figure dans le second membre est une constante (20); si les éléments α, β, γ, γ' de la fonction F_4 satisfont à la relation $\eta = 0$, le second membre de l'équation (21) est nul; dans ce cas, la fonction F_4 de ν satisfait donc à une équation linéaire du *second ordre* intégrable à l'aide de la série de Gauss. Cette condition se trouve remplie pour la fonction F_4 qui figure dans le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ lorsque $p = 2$. On retrouve ainsi le résultat indiqué pour ce cas par M. Tisserand.

Supposons maintenant $\eta \gtrless 0$; nous avons, en posant, pour abréger,

$$(22)\qquad P = \nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2} + \Theta\frac{dz}{d\nu} - 4Bz,$$

la relation

$$(21')\qquad P = 2\eta\left(p\cos^2\frac{J}{2} + q\sin^2\frac{J}{2}\right);$$

d'où

$$(23)\qquad \frac{dP}{d\nu} = 2\eta(q-p) - 4\eta\left(r\cos^4\frac{J}{2} - t\sin^4\frac{J}{2}\right);$$

donc, d'après (16),

$$\frac{dP}{d\nu} = 2\tau_1 q(1-2\gamma') - 2\tau_1 p(1-2\gamma), \tag{24}$$

où l'on peut remarquer que le deuxième membre est nul si

$$\gamma = \gamma' = \tfrac{1}{2},$$

de sorte que, dans ce cas, P est *indépendant de* ν. Dans le cas général, on peut éliminer p et q entre les équations (18), (21′) et (24), et l'on obtient ainsi l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dP}{d\nu} & 1-2\gamma' & -1+2\gamma \\ P & \sin^2\dfrac{J}{2} & \cos^2\dfrac{J}{2} \\ \tau_1\dfrac{dz}{d\nu} & \sin^2\dfrac{J}{2} & -\cos^2\dfrac{J}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

où P a la valeur (22). Cette équation simplifiée s'écrit de la façon suivante, toutes réductions faites :

$$\tag{25} \left\{ \begin{aligned} &(\nu-\nu^2)^2\frac{d^3 z}{d\nu^3} + (\nu-\nu^2)[A-\gamma+2\gamma'-\nu(2A+\gamma+\gamma')]\frac{d^2 z}{d\nu^2} \\ &\quad + \{\nu^2[4B+(2A-1)(\gamma+\gamma')] \\ &\quad - 2\nu[2B+\gamma'(2A-1)] - (1-2\gamma')(A-\gamma)\}\frac{dz}{d\nu} \\ &\quad + 2Bz[1-2\gamma'-2\nu(1-\gamma-\gamma')] = 0. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation du troisième ordre [1] à laquelle satisfait la fonction (12), c'est-à-dire

$$z = F_1[\alpha, \beta, \gamma, \gamma', (1-\nu)^2, \nu^2].$$

---

[1] En se plaçant dans le cas où les coefficients ont les valeurs (13), M. Radau a formé directement cette équation [*Annales de l'Observatoire*, 1884. *Sur le développement*, etc., équation (19)].

Dans le cas particulier qui nous intéresse plus spécialement, où α, β, γ, γ' ont les valeurs (13), cette fonction est un polynôme du degré

$$N - i - j,$$

en ν, et, si l'on fait alors

$$z = \lambda_0 + \lambda_1 \nu + \lambda_2 \nu^2 + \ldots + \lambda_{N-i-j} \nu^{N-i-j},$$

la substitution de cette expression dans l'équation différentielle (25) fournira une relation récurrente entre trois des coefficients consécutifs $\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, permettant de les calculer tous quand on connaît les deux premiers, λ_0 et λ_1 (*voir* p. 426). Or ces deux coefficients s'obtiennent de la façon suivante. D'abord on a, en faisant $\nu = 0$,

$$\lambda_0 = F_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', 1, 0) = F(\alpha, \beta, \gamma, 1),$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désignant la série hypergéométrique de Gauss; puis, en faisant $\nu = 0$ dans la dérivée $\frac{dz}{d\nu}$, on a

$$\lambda_1 = \left| -2(1-\nu)\frac{\partial F_1}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{\nu=0},$$

c'est-à-dire, d'après la relation

$$\frac{\partial F_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)}{\partial x} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \gamma', x, y),$$

$$\lambda_1 = -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \gamma', 1, 0)$$

$$= -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, 1).$$

Ces deux coefficients λ_0 et λ_1 peuvent donc être exprimés à l'aide des fonctions F. L'expression générale du coefficient λ_n a été indiquée par M. Radau (*Comptes rendus*, séance du 3 décembre 1883).

L'équation différentielle (25) peut être intégrée à l'aide de la série hypergéométrique du second ordre

$$F\left(\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & \end{matrix} \; x\right) = \sum_0^\infty \frac{(a, n)(b, n)(c, n)}{(d, n)(e, n)(1, n)} x^n.$$

dans le cas particulier où $\gamma = \gamma'$. En effet, si l'on suppose $\gamma = \gamma'$ et si l'on fait un changement de variable en posant

$$\rho = \sin^2 J = 4\nu(1-\nu),$$

l'équation (25) devient, après suppression du facteur $(1-2\nu)$,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho^2(1-\rho)\frac{d^3z}{d\rho^3} + \rho\left[A+\gamma-\rho\left(A+\gamma+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{d^2z}{d\rho^2} \\ &\qquad + \left[(2\gamma-1)(A-\gamma) - \left(B+A\gamma+\frac{1}{2}A\right)\rho\right]\frac{dz}{d\rho} \\ &\qquad\qquad - B\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)z = 0; \end{aligned}\right.$$

ce qui est l'équation à laquelle satisfait la fonction

$$(27)\qquad F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma-\frac{1}{2} \\ A-\gamma, & 2\gamma-1 & \end{matrix}\middle|\,\rho\right).$$

L'intégrale qui nous occupe dans le cas particulier (13) est celle qui se réduit à λ_0 pour $\nu = 0$, c'est-à-dire pour $\rho = 0$; elle est donc

$$\lambda_0 F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma-\frac{1}{2} \\ A-\gamma, & 2\gamma-1 & \end{matrix}\middle|\,\rho\right).$$

Ce résultat est d'accord avec celui de M. Tisserand, qui a montré que le coefficient $B_{i,j}^{N,p'}$ peut être exprimé à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre lorsque $i = j$, ce qui, d'après les expressions (13), revient à $\gamma = \gamma'$.

Enfin, on peut chercher, d'après les résultats donnés par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 89), dans quels cas ce coefficient (27) est le carré d'une fonction hypergéométrique de Gauss

$$(27')\qquad F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \rho).$$

Rappelons-nous pour cela que, pour que la fonction

$$F\left(\begin{matrix}a, b, c \\ d, e\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

soit le carré d'une fonction de Gauss, il faut et il suffit que ses éléments a, b, c, d, e remplissent les conditions suivantes :

$$(28) \qquad c = \frac{a+b}{2}, \quad d = \frac{a+b+1}{2}, \quad e = a+b,$$

et alors on a

$$(28') \qquad F\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| x\right) = F^2\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a+b+1}{2}, x\right).$$

On obtient ainsi six cas dans lesquels le coefficient (27) est le carré d'une fonction de Gauss, en appelant successivement c chacun des éléments supérieurs

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma - \tfrac{1}{2},$$

et d chacun des éléments inférieurs

$$A - \gamma, \ 2\gamma - 1.$$

Le plus intéressant de ces cas est celui où l'on ferait

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma - \tfrac{1}{2}, \quad d = A - \gamma, \quad e = 2\gamma - 1;$$

alors les conditions (28) se réduisent à une seule

$$(29) \qquad \gamma - \frac{1}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

et, lorsque cette condition (29) est remplie, on a

$$F\left(\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma - \frac{1}{2} \\ A - \gamma, 2\gamma - 1 \end{matrix} \middle| \rho\right) = F^2\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma, \rho\right).$$

En supposant que α, β, γ aient les valeurs particulières (13) avec $\gamma = \gamma'$, c'est-à-dire $i = j$, la condition (29) donne

$$\frac{p-1}{2} + 2i = 2i + 1,$$

c'est-à-dire

$$p = 3.$$

Donc, lorsque $p = 3$, $\frac{p-1}{2} = 1$, le coefficient $B_{i,i}^{s,p}$ s'exprime à l'aide du carré d'une fonction de Gauss, et l'on retrouve ainsi un résultat indiqué par M. Tisserand.

4. Pour faire une autre application des considérations générales développées dans le n° **2**, prenons la fonction

$$z = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y), \tag{30}$$

qui satisfait aux équations simultanées

$$\left\{\begin{aligned} &(x - x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ &(y - y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y]q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

et faisons

$$y = 1 - x; \tag{32}$$

alors z devient une fonction de x seul, et cette fonction vérifie une équation différentielle du *troisième ordre* qu'on peut former de la façon suivante.

En additionnant, puis retranchant membre à membre les équations (31), dans lesquelles on remplace y par $1 - x$, on a les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} &(x - x^2)(r - 2s + t) = \varepsilon(p + q) + X(p - q) + \alpha(\beta + \beta')z, \\ &(x - x^2)(r - t) = -[\gamma - (\alpha + \beta - \beta' + 1)x]p \\ &\qquad\qquad + [\gamma' - (\alpha + \beta' - \beta + 1)y]q + \alpha(\beta - \beta')z, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

dans la première desquelles on a posé, pour simplifier,

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon = \frac{\alpha + \beta + \beta' + 1 - \gamma - \gamma'}{2}, \\ &X = (\alpha + \beta + \beta' + 1)x - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \beta' + 1 + \gamma - \gamma') \end{aligned}\right. \tag{33'}$$

Ceci posé, l'on a, en vertu de la relation (32),

$$\frac{dz}{dx} = p - q, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = r - 2s + t,$$

et la première des équations (33) donne

$$(34)\qquad (x - x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + X\frac{dz}{dx} - \alpha(\beta + \beta')z = \varepsilon(p + q).$$

Il résulte de là que, si la constante ε est nulle, la fonction

$$z = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, 1 - x)$$

vérifie l'équation du second ordre

$$(x - x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + \beta' + 1)x]\frac{dz}{dx} - \alpha(\beta + \beta')z = 0,$$

qui admet pour intégrales les deux fonctions

$$z_1 = F(\alpha, \beta + \beta', \gamma, x),$$
$$z_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + \beta' + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x);$$

on aura donc, dans ce cas,

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

C_1 et C_2 désignant des constantes.

Revenons maintenant au cas général où ε est différent de zéro, et désignons par P le premier membre de l'équation (34)

$$(34')\qquad P = (x - x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + X\frac{dz}{dx} - \alpha(\beta + \beta')z;$$

cette équation s'écrit

$$P = \varepsilon(p + q),$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{dP}{dx} = \varepsilon(r - t)$$

et en remplaçant $(r-t)$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (33),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(x-x^2)\frac{dP}{dx} = &-[\gamma-(\alpha+\beta-\beta'+1)x]p \\ &+[\gamma'-(\alpha+\beta'-\beta+1)x]q+\alpha(\beta-\beta')z \end{aligned}\right.$$

Des relations

$$p+q=\frac{P}{\varepsilon},\quad p-q=\frac{dz}{dx},$$

on tire

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{\varepsilon}+\frac{dz}{dx}\right),\quad q=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{\varepsilon}-\frac{dz}{dx}\right),$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (35), on obtient enfin l'équation différentielle du troisième ordre

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}(x-x^2)\frac{dP}{dx}+\frac{P}{2\varepsilon}[\gamma-\gamma'-\beta+\beta'-(\alpha+1)(2x-1)] \\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}[\gamma+\gamma'-\alpha-1-(\beta-\beta')(2x-1)]-\alpha(\beta-\beta')z=0 \end{aligned}\right.$$

Cette équation différentielle (36), ainsi que l'équation (25), est de la forme

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)^2\frac{d^3z}{dx^3}+(x-x^2)(ax+b)\frac{d^2z}{dx^2} \\ &\qquad+(cx^2+fx+g)\frac{dz}{dx}+(hx+k)z=0, \end{aligned}\right.$$

les constantes a, b, c, f, g, h, k étant des fonctions des cinq constantes $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

Cette équation (37) peut être intégrée à l'aide de séries hypergéométriques du second ordre toutes les fois que les constantes qui figurent dans les coefficients vérifient les trois relations

$$(38)\qquad a+2b=0,\quad c+f=0,\quad h+2k=0.$$

En effet, si ces conditions sont remplies, on pourra, en faisant le

changement de variable

$$y = 4x(1-x),$$

et prenant y pour nouvelle variable indépendante, ramener cette équation à la forme

$$y^2(1-y)\frac{d^3z}{dy^3} + y\left[b - y\left(b+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$+\left(\frac{f-2b}{4}y + g\right)\frac{dz}{dy} + kz = 0,$$

qui est celle de l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction

(39) $$F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ & \varepsilon, & \delta\end{matrix}\ y\right).$$

Enfin l'équation (37) se réduit immédiatement à l'équation de la série hypergéométrique du second ordre (39) dans l'un et l'autre des deux cas

(40) $$c+f+g=0, \quad h+k=0,$$

ou bien

(40′) $$g=0, \quad k=0,$$

à condition de changer, dans ce dernier cas, x en $1-x$.

5. Dans l'équation (37), supposons les coefficients quelconques et admettons que l'équation

(41) $$\varphi(r) = (r-1)(r-2) + (r-1)b + g = 0$$

n'ait aucune racine entière positive. Alors l'équation différentielle linéaire (37) possède, dans le domaine du point $x=0$, une intégrale

holomorphe de la forme

$$(42)\qquad z = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

En substituant cette série dans l'équation (37) et égalant à zéro le coefficient de x^n, on trouve entre trois coefficients consécutifs A_{n+1}, A_n, A_{n-1} la relation récurrente

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &(n+1)[n^2 - n(1-b) + g]A_{n+1} \\ &\quad = [2n^3 - n^2(a-b+6) + n(a-b-f+4) - k]A_n \\ &\qquad - [n^3 - n^2(a+6) + n(3a+c+11) - (2a+c-h+6)]A_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

qui permet de calculer tous les coefficients en fonction de A_0; en effet, en égalant à zéro le terme constant après la substitution de la série (42) dans l'équation différentielle, on trouve d'abord

$$A_1 = -\frac{k}{g}A_0;$$

puis l'équation (43), où l'on fait successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, donne les coefficients suivants : le coefficient de A_{n+1}, dans la relation (43), n'est nul pour aucune valeur de l'entier n, car nous avons supposé que l'équation (41) n'a aucune racine entière positive. On trouve ainsi une intégrale holomorphe que nous écrirons, en supposant $A_0 = 1$,

$$(44)\qquad z_1 = \mathfrak{F}(a, b, c, f, g, h, k, x).$$

Si l'on fait ensuite la substitution

$$z = x^r z',$$

et si l'on suppose r égal à l'une des racines de l'équation (41), on trouve pour z' une équation de la forme (37), dans laquelle les coef-

ficients a, b, c, f, g, h, k sont remplacés par les suivants :

$$\begin{aligned}
a' &= a - 3r,\\
b' &= b + 3r,\\
c' &= c - 2ar + 3r(r-1),\\
f' &= f + 2r(a-b) - 6r(r-1),\\
g' &= g + 2br + 3r(r-1),\\
h' &= h + gr + r(r-1)(r-2),\\
k' &= k + fr + r(r-1)a - 2r(r-1)(r-2),
\end{aligned}$$

de sorte que l'équation proposée (37) admet pour intégrale la fonction

$$(45) \qquad x^r \mathfrak{F}(a', b', c', f', g', h', k', x).$$

Si l'équation (41) a deux racines distinctes dont la différence n'est pas entière, on aura, en supposant r successivement égal à ces deux racines, deux expressions, telles que (45), qui seront des intégrales de l'équation différentielle. On sera donc en possession d'un système fondamental dans le domaine du point $x = 0$.

On obtiendra de même un système fondamental d'intégrales dans le domaine du point $x = 1$, car l'équation (37) garde la même forme quand on change x en $1 - x$. Enfin on obtiendra un système fondamental dans le domaine du point ∞ en remarquant que, par la substitution

$$x = \frac{1}{x'}, \quad z = x'^{\rho} z',$$

on peut, après une détermination convenable de ρ, ramener l'équation différentielle que vérifie la fonction z' de x' à la forme (37).

Je ne m'arrête pas aux cas où l'une des équations déterminantes relative à l'un des trois points singuliers 0, 1, ∞ aurait des racines entières, ou à différences entières, ces cas pouvant être traités facilement par les méthodes de M. Fuchs.

En terminant, je remarque que la relation récurrente (43), dans laquelle n a des valeurs très grandes, se rapproche de plus en plus de la relation

$$B_{n+1} = 2B_n - B_{n-1},$$

qui donne, pour B_n, la valeur

$$B_n = \lambda n + \mu,$$

λ et μ désignant deux constantes arbitraires.

Sur quelques conséquences de la formule de Green et sur la théorie du potentiel;

PAR M. PH GILBERT,

Professeur à l'Université de Louvain.

Ces Notes, écrites surtout dans un but didactique, forment une sorte de *Complément* aux *Leçons sur l'Électrostatique*, publiées par M. Resal dans le Tome VIII de ce Journal. Je rappellerai ici que les géomètres se partagent en deux camps, en ce qui concerne les propriétés des couches superficielles. Généralement, les savants français et anglais regardent ces couches comme ayant simplement une épaisseur très petite, et leur appliquent sans scrupule les théorèmes établis pour le cas où la matière agissante remplit un espace à trois dimensions; tandis que les Allemands et les Italiens traitent ces couches comme n'ayant *aucune* épaisseur, ce qui exige une nouvelle définition de la densité et une modification profonde des propriétés du potentiel.

Sans discuter ici lequel de ces deux modes d'exposition est le plus conforme à la nature des choses et le plus commode pour la théorie mathématique, je dirai seulement que, dans ce qui suit, je me suis placé au second point de vue.

I. Rappelons la formule de Green

$$(1)\quad \int_{\Omega} U\,\Delta_2 V\,d\omega = -\int_{S} U\frac{\partial V}{\partial n_i}\,d\sigma - \int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega.$$

U et V sont des fonctions de x, y, z, continues, ainsi que leurs dérivées partielles premières, dans tout l'espace Ω; $\Delta_2 V$ représente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

la première intégrale et la troisième s'étendent à tous les éléments $d\omega$ du volume Ω, la deuxième à tous les éléments $d\sigma$ de la surface fermée S qui enveloppe ce volume; $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est la dérivée partielle de V suivant la normale à la surface S dirigée vers l'intérieur du volume Ω. La surface S peut avoir une forme quelconque et se composer même de plusieurs surfaces fermées distinctes.

Considérons une seconde surface fermée Σ enveloppant la première, et soit Ω' l'espace compris entre S et Σ. Appliquons à Ω' l'équation (1), en observant que la normale à S, vers l'intérieur de Ω', n'est autre que la normale *extérieure* n_e par rapport à Ω, et ajoutons cette équation à la relation (1). Nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} U\,\Delta_2 V\,d\omega = &-\int_S U\left(\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e}\right)d\sigma - \int_\Sigma U\,\frac{\partial V}{\partial n_i}\,d\sigma \\ &-\int_{\Omega+\Omega'}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega. \end{aligned}\right.$$

En faisant $U = 1$ et prenant pour V le potentiel ([1]) d'une masse Q répartie sur une surface fermée, on trouverait que la relation de Gauss

$$(3)\qquad \int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n_i}\,d\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad 4\pi Q$$

(suivant que la masse Q est extérieure ou intérieure à la surface Σ) subsiste pour le potentiel V d'une couche superficielle. Sans nous arrêter à ces détails, développons les conséquences de l'équation (2).

II. Admettons que Σ désigne une surface sphérique dont le rayon R

([1]) Nous appliquons ici le mot dans le sens de Gauss. D'autres géomètres disent la *fonction potentielle*.

pourra croître au delà de toute limite. Comme on a

$$\int_\Sigma U\frac{\partial V}{\partial n_i}\,d\sigma = 4\pi R^2\,\mathfrak{M}\left(U\frac{\partial V}{\partial n_i}\right),$$

$\mathfrak{M}$ désignant une moyenne entre les valeurs de la fonction sur toute l'étendue de la surface Σ, on sait que $R^2\frac{\partial V}{\partial n_i}$ ne croîtra pas indéfiniment avec R, tandis que U convergera vers zéro, si U et V sont les potentiels de masses situées à distance finie. L'intégrale aura donc pour limite zéro; en même temps l'espace Ω' s'étendra à l'infini autour de S, et $\Omega + \Omega'$ représentera tout l'espace indéfini intérieur et extérieur à la surface S, ce que nous indiquerons par l'indice ∞ affectant les intégrales. L'équation (2) deviendra donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int_\infty U\Delta_2 V\,d\omega = &-\int_S U\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}+\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)d\sigma \\ &-\int_\infty\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega. \end{aligned}\right.$$

Si l'on permute U et V qui jouissent des mêmes propriétés et que l'on soustraye, il vient

$$(5)\quad \int_\infty (U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\,d\omega = -\int_S U\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}+\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)d\sigma + \int_S V\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}+\frac{\partial U}{\partial n_e}\right)d\sigma.$$

Comme première application de cette formule, supposons que l'on distribue *successivement* sur la surface S deux couches, dont les densités variables respectives soient h et h', et soient V et $U = V'$ les potentiels de ces couches. On aura, dans tout l'espace indéfini,

$$\Delta_2 U = 0,\quad \Delta_2 V = 0,$$

et sur la surface S,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i}+\frac{\partial V}{\partial n_e} = -4\pi h,\quad \frac{\partial U}{\partial n_i}+\frac{\partial U}{\partial n_e} = -4\pi h',$$

et l'équation (5) deviendra

$$(6)\qquad \int_S V' h\,d\sigma = \int_S V h'\,d\sigma$$

Dans ce théorème, comme dans les précédents, la surface fermée S a une forme arbitraire et peut même se composer d'un système de surfaces fermées indépendantes : le raisonnement est le même [1].

III. Supposons maintenant que V soit le potentiel d'une masse Q, répartie suivant une densité h sur la surface fermée S, et U le potentiel d'une masse M répartie, suivant une loi de densité ρ, dans un espace quelconque T à trois dimensions; $\Delta_2 V$ sera nul en tout point de l'espace indéfini, $\Delta_2 U$ également, sauf dans l'espace T où l'on aura, par le théorème de Poisson,

$$\Delta_2 U = -4\pi\rho.$$

Le premier membre de (5) se réduira donc à $4\pi \int_T V \rho \, d\omega$; dans le second, on aura

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_e} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} = -4\pi h,$$

et il se réduira ainsi à $4\pi \int_S U h \, d\sigma$. De là la relation importante

$$(7) \qquad \int_T V \rho \, d\omega = \int_S U h \, d\sigma.$$

L'espace T peut se composer de plusieurs volumes détachés, la surface S de plusieurs surfaces fermées distinctes.

IV. Conservons à V et U ces dernières significations, et remplaçons dans l'équation (4) U et V par V + U, en posant, pour abréger,

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2;$$

---

[1] Ce théorème a été donné, par M. Legebeke, comme une généralisation de celui de M. Clausius, dans le numéro de mars 1884 de ce *Journal*, et antérieurement dans les *Annales* de Wiedemann (t. X, 1880). Sans connaître cette première publication, j'avais communiqué le même théorème et la formule (4) dont il dérive à la Société scientifique de Bruxelles le 3 mai 1883 (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 7e année, p. 67; 1883).

nous aurons

$$\int_\varpi (V+U)\Delta_2(V+U)\,d\omega$$
$$= -\int_S (V+U)\left[\frac{\partial(V+U)}{\partial n_i} + \frac{\partial(V+U)}{\partial n_e}\right]d\sigma - \int_\varpi \Delta_1(V+U)\,d\omega,$$

ou, d'après les remarques faites au numéro précédent,

$$(8)\qquad \int_T (V+U)\rho\,d\omega + \int_S (V+U)\,h\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\varpi \Delta_1(V+U)\,d\omega.$$

Ce théorème comporte la même extension que le précédent. Si toute la matière agissante était répartie sur la surface S, on ferait $\rho = 0$, $U = 0$; on aurait

$$(9)\qquad \int_S V\,h\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\varpi \Delta_1 V\,d\omega.$$

Si, au contraire, il n'y avait de masse agissante que celle distribuée avec la densité ρ dans le volume T, on aurait $h = 0$, $V = 0$, et par suite

$$(10)\qquad \int_T U\rho\,d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_\varpi \Delta_1 U\,d\omega.$$

V. La formule (6) permet de démontrer immédiatement un théorème de Riemann sur l'équilibre d'un système de conducteurs électrisés [1], et même la généralisation qui en a été donnée par M. Clausius [2].

Soient

S la surface d'un quelconque des conducteurs isolés ou communiquant avec le sol;
h la densité,
Q la masse,

---

(1) KÖTTERITSCH, *Lehrbuch der Elektrostatik*, p. 194; — CROUILLEBOIS, *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 719.

(2) *Annales de Wiedemann*, p. 405, 1877; — RÉSAL, *Phys. math.*, p. 185.

V le niveau potentiel de la couche électrique sur la surface S dans un premier état d'équilibre,

h', Q', V', les quantités correspondantes dans un second état d'équilibre.

On aura, d'après l'équation (6),

$$\Sigma \int_S V h' \, d\sigma = \Sigma \int_S V' h \, d\sigma,$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à tous les conducteurs. Mais sur une surface S, V est constant et égal au niveau potentiel du conducteur, $\int_S h' \, d\sigma$ est égal à Q'. De même, V' est constant et $\int_S h \, d\sigma$ n'est autre chose que la quantité Q d'électricité libre; donc

$$\Sigma V Q' = \Sigma V' Q.$$

Le théorème de Riemann est un cas particulier, celui où tous les conducteurs, sauf un, communiquent avec le sol. Il serait très facile de généraliser encore le théorème en faisant intervenir des diélectriques dans le système électrisé.

VI. Mais l'usage principal des équations (6), (7) et (8) est dans la démonstration des célèbres théorèmes de Gauss sur la possibilité de couvrir une surface fermée de matière agissante, de façon que le potentiel de la couche satisfasse à certaines conditions ([1]), théorèmes si utiles dans l'électrostatique. La démonstration de Gauss est pénible et indirecte. Dirichlet a tenté d'ouvrir une voie plus facile au moyen de son *Principe*, mais son raisonnement ([2]) comporte des objections sérieuses qu'il importe de signaler.

Dirichlet établit l'existence d'une certaine fonction u' de x, y, z, dont les dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues en un point quelconque de l'espace, les dérivées secondes satisfaisant à l'équation $\Delta_2 u' = 0$. Lorsqu'un certain rayon R devient infini, cette

([1]) *Allgemeine Lehrsätze*, etc. — *Œuvres de Gauss*, t. V, p. 197.

([2]) Grube, *Vorlesungen von Lejeune-Dirichlet*, p. 127 et suiv.

fonction u' tend, en chaque point (x, y, z), vers une limite

$$u = \varphi(x, y, z),$$

et Dirichlet conclut que cette fonction vérifie également les deux conditions ci-dessus auxquelles satisfait u'. Cette conclusion n'est évidemment pas rigoureuse. De plus, pour identifier la fonction u avec le potentiel de couches superficielles, Dirichlet est obligé de se servir des *fonctions sphériques*, dont l'usage dans une question de cet ordre paraît assez étrange. Nous allons voir, au contraire, qu'en se servant des théorèmes ci-dessus, et suivant à peu près la marche de M. Betti, on arrive simplement et rigoureusement au principe de Gauss.

VII. Soient V le potentiel d'une masse Q, répartie sur une surface fermée S suivant une loi exprimée par la densité h, fonction de x, y, z; U le potentiel d'un système de masses M, distribuées avec une densité variable ρ dans un espace T à trois dimensions, qui peut se composer de volumes détachés T', T'', ... Posons

$$(11) \qquad \mathrm{P} = \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{V} + \mathrm{U})\, h\, d\sigma + \int_{\mathrm{T}} (\mathrm{V} + \mathrm{U})\, \rho\, d\omega.$$

Les masses M occupent des positions fixes, mais la masse donnée Q peut être répartie arbitrairement sur S, de sorte que h est seulement assujetti à vérifier la condition

$$\int_{\mathrm{S}} h\, d\sigma = \mathrm{Q}.$$

Il existe une distribution telle que l'expression P *soit un minimum.* En effet, d'après la relation (8), on a

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \Delta_1 (\mathrm{V} + \mathrm{U})\, d\omega,$$

et cette intégrale ayant nécessairement une valeur *finie* et *positive*, quelle que soit la loi de densité h, il existe une densité h pour laquelle l'intégrale P a une valeur plus petite que pour toute autre.

Cherchons cette valeur de h. D'après l'équation (7), on a

$$P = \int_S (V + 2U) h\, d\sigma + \int_T U\rho\, d\omega,$$

et le dernier terme est invariable, par hypothèse. Il suffit donc de chercher le minimum de $\int_S (V + 2U) h\, d\sigma$. Soient δh une variation finie ou infiniment petite, de la fonction h, δV la variation correspondante de V. Nous aurons

$$\begin{aligned}\delta P &= \delta \int_S (V + 2U) h\, d\sigma \\ &= \int_S (V + \delta V + 2U)(h + \delta h)\, d\sigma - \int_S (V + 2U) h\, d\sigma \\ &= \int_S \delta V\, h\, d\sigma + \int_S (V + 2U)\, \delta h\, d\sigma + \int_S \delta V\, \delta h\, d\sigma,\end{aligned}$$

avec la condition résultant de la constance de Q, $\int_S \delta h\, d\sigma = 0$. Mais, si u désigne la distance d'un élément de la couche au point (x, y, z), on a

$$\delta V = \int_S \frac{(h + \delta h)\, d\sigma}{u} - \int_S \frac{h\, d\sigma}{u} = \int_S \frac{\delta h\, d\sigma}{u},$$

en sorte que δV est égal au potentiel d'une masse *nulle*, distribuée sur la surface S avec une densité δh. Faisons donc, dans l'équation (6), $h' = \delta h$ et $V' = \delta V$; nous aurons

$$\int_S \delta V\, h\, d\sigma = \int_S V\, \delta h\, d\sigma.$$

De plus, appliquant à la couche de densité δh et à son potentiel δV la relation (9), nous trouverons

$$\int_S \delta V\, \delta h\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \Delta_1 (\delta V)\, d\omega.$$

Il suit de là que l'expression de la variation de P peut se mettre

sous ces deux formes :

$$(12) \qquad \delta P = 2\int_S (V+U)\,\delta h\,d\sigma + \int_S \delta V\,\delta h\,d\sigma,$$

$$(12') \qquad \delta P = 2\int_S (V+U)\,\delta h\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(\delta V)\,d\varpi.$$

VIII. La seconde de ces équations montre que, *si la densité* h *est telle que l'on ait, sur toute la surface* S, *la relation*

$$V + U = \text{const.},$$

P *sera un minimum*, car on a alors

$$\int_S (V+U)\,\delta h\,d\sigma = (V+U)\int_S \delta h\,d\sigma = 0,$$

et δP se réduit à son dernier terme, qui est positif, quel que soit δh.

Réciproquement, P ne peut devenir minimum que si $V+U$ affecte la même valeur pour tous les points de la surface S. En effet, si $V+U$ était variable et que A désigne une constante comprise entre les valeurs extrêmes de $V+U$, la fonction $V+U-A$ serait tantôt positive, tantôt négative sur la surface S. Or on peut écrire l'équation (12) sous la forme

$$\delta P = 2\int_S (V+U-A)\,\delta h\,d\sigma + \int_S \delta V\,\delta h\,d\sigma.$$

Soient ε une constante très petite, h_1 une fonction de x, y, z qui n'est assujettie jusqu'ici qu'à la condition $\int_S h_1\,d\sigma = 0$; posons

$$\delta h = \varepsilon h_1, \quad \text{d'où} \quad \delta V = \varepsilon\int_S \frac{h_1\,d\sigma}{u} = \varepsilon V_1,$$

d'où enfin

$$\delta P = 2\varepsilon\int_S (V+U-A)\,h_1\,d\sigma + \varepsilon^2\int_S V_1 h_1\,d\sigma.$$

On sait, par l'équation (12'), que ce dernier terme est toujours positif. Nous rendrons le précédent négatif en choisissant la fonction h_1

de façon qu'elle ait, en chaque point, le signe contraire à celui de $(V + U - A)$, ce qui peut évidemment se faire d'une infinité de manières en observant la condition $\int_S h_1\, d\sigma = 0$. Et comme ε peut être aussi petit qu'on le veut, le premier terme finira toujours par surpasser le second en valeur absolue; δP sera donc négatif pour $\delta h = \varepsilon h_1$. P n'était donc pas un minimum.

Concluons de là, puisqu'il existe une loi de la densité h pour laquelle P est un minimum, qu'il en existe une pour laquelle $V + U$ est constant en tous les points de la surface S.

IX. *Cette distribution est unique d'ailleurs.* — Soient, en effet,

h une loi de densité pour laquelle $V + U$ est constant sur la surface S;
$h + \eta$ une autre loi qui satisfait à la même condition;
$V + v$ le potentiel de la couche correspondante;
P' la valeur de P.

L'équation (12′) s'appliquant même à une variation *finie* de P, on aura

$$\int_S \eta\, d\sigma = 0, \quad \delta P = P' - P = \frac{1}{4\pi}\int_S \Delta_1 v\, d\omega.$$

Désignons par α une constante voisine de l'unité, par $h + \alpha\eta$ une troisième répartition de la masse Q sur S. Cela est permis, puisque

$$\int_S (h + \alpha\eta)\, d\sigma = \int_S h\, d\sigma + \alpha \int_S \eta\, d\sigma = Q.$$

Le potentiel de la couche correspondante deviendra

$$V + \alpha \int_S \frac{\eta\, d\sigma}{u} = V + \alpha v, \quad \delta V = \alpha v,$$

et par suite on aura, dans l'équation (12′),

$$\Delta_1(\delta V) = \alpha^2 \Delta_1 v, \quad P'' - P = \frac{\alpha^2}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 v\, d\omega,$$

P″ étant la valeur de P qui correspond à cette nouvelle distribution. De là, enfin,

$$\mathrm{P}'' - \mathrm{P}' = \frac{\alpha^2 - 1}{4\pi} \int_{\mathrm{S}} \Delta_1 v \, d\varpi.$$

P′ étant, par hypothèse, une valeur minimum de P, il faut que, pour toutes les distributions très peu différentes de celle qui correspond à la valeur P′, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de α voisines de l'unité, $\mathrm{P}'' - \mathrm{P}$ soit positif. Mais, l'intégrale ayant une valeur positive, cette condition ne sera pas remplie pour les valeurs de α inférieures à l'unité; donc l'hypothèse était fausse. De là cette loi : *Il est toujours possible, d'une seule manière, de répartir une quantité donnée* Q *de matière agissante sur une surface fermée* S, *de façon que l'intégrale* P *acquière une valeur minimum; la fonction* $\mathrm{V} + \mathrm{U}$ *a alors une valeur constante en tous les points de cette surface.*

C'est uniquement pour faciliter l'exposition que nous avons pris une seule surface fermée. Le théorème subsiste et la démonstration se fait de même si S désigne l'ensemble de plusieurs surfaces isolées S_1, S_2, ... sur chacune desquelles on a à répartir une quantité donnée de matière agissante. Dans la distribution qui répond au minimum de P, $\mathrm{V} + \mathrm{U}$ sera constant sur une même surface, mais sa valeur pourra différer d'une surface à l'autre. Cela suffit pour établir l'existence d'un état d'équilibre unique dans un système électrisé.

Dans ce qui suit, ayant en vue surtout le principe de Gauss, nous réduirons S à une surface unique.

X. Si les masses M et leur potentiel U se réduisent à zéro, on aura

$$\mathrm{P} = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \, h \, d\sigma,$$

et la condition $\mathrm{V} + \mathrm{U} = \text{const.}$ se réduira à $\mathrm{V} = \text{const.}$ De plus, comme la surface S n'a dans son intérieur aucune matière agissante, V sera, d'après un théorème connu, constant dans tout l'espace enveloppé par S. *On peut donc toujours, d'une seule manière, répartir une quantité donnée* Q *de matière agissante sur une surface fermée, de façon*

que $\int_S V h\, d\sigma$ *soit un minimum, et que le potentiel* V *de la couche formée soit constant sur toute la surface et dans son intérieur.*

Cette valeur constante A *de* V *ne saurait être nulle,* sans quoi, d'après les propriétés connues du potentiel, V serait aussi nul dans l'intérieur et à l'extérieur de la surface S. On aurait ainsi, en chaque point de la surface,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

et par suite $h = 0$. Q serait donc nul, ce qui est contre l'hypothèse.

Il s'ensuit que, si l'on dispose de la masse Q, A pourra atteindre telle valeur qu'on voudra; car, si l'on multiplie la fonction h par un facteur α, la masse deviendra αQ, et le potentiel deviendra

$$\int_S \frac{\alpha h\, d\sigma}{u} = \alpha V.$$

La constante A sera donc remplacée par αA. *On peut donc toujours répartir sur la surface* S *une quantité* Q *de matière agissante, telle que, sur toute la surface, le potentiel de la couche ait une valeur constante donnée d'avance.*

XI. Les théorèmes de Gauss découlent facilement de là.

Considérons une surface fermée S, des masses agissantes M placées hors de la surface, ayant une densité ρ et un potentiel U. On pourra toujours, d'une seule manière, distribuer sur S une quantité donnée Q de matière, de façon que la différence V − U du potentiel de la couche ainsi formée et du potentiel des masses M soit constante pour tous les points de la surface; car, imaginons que l'on remplace chaque élément de la masse M par un élément de masse égal et de signe contraire $-\rho\, d\omega$; le potentiel de cette masse − M sur un point quelconque de l'espace sera − U, et, d'après le théorème du n° IX, la masse Q peut être répartie sur la surface S, de telle manière que la somme des potentiels de la couche ainsi formée et de cette masse − M soit constante sur S. On aura donc

$$V - U = \text{const.}$$

On sait, de plus, que cette distribution ne peut se faire que d'une seule manière, et qu'elle rend minimum l'intégrale $\int_S (V - 2U)h\,d\sigma$.

Mais le potentiel $V - U$ étant constant sur la surface S, dans l'intérieur de laquelle il n'existe pas de matière agissante, il est constant dans tout l'espace enveloppé par S. On a donc, en chaque point de cet espace,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

d'où le premier théorème de Gauss : *Étant donné un système* M *de masses agissantes en dehors d'une surface fermée* S, *il est toujours possible, d'une seule manière, de répartir sur cette surface une quantité donnée* Q *de matière agissante, de façon que cette couche exerce, sur un point quelconque de l'espace enveloppé par* S, *une action identique à celle des masses* M.

XII. Supposons maintenant que les masses M soient toutes comprises dans l'espace enveloppé par S. Imaginons encore que l'on substitue à chaque élément des masses M un élément égal et de signe contraire $-\rho\,d\omega$; le potentiel des masses M deviendra $-U$ et, d'après le n° IX, on pourra encore répartir une masse Q donnée sur la surface S de façon que l'on ait, sur toute cette surface,

$$V - U = \text{const.} = A,$$

V étant le potentiel de la couche superficielle. De plus, par un choix convenable de la masse Q, on réduira la constante A à zéro. En effet, d'après ce qui a été dit au n° X, on peut répartir sur S une masse convenablement choisie Q', de façon que le potentiel de la couche ainsi formée ait, sur toute la surface S, une valeur constante $-A$. Superposons, en chaque point, la densité h' de cette couche à la densité h de la précédente; nous formerons une nouvelle distribution dont le potentiel V' aura pour valeur, en un point quelconque de la surface,

$$\int_S \frac{h + h'}{u}\,d\sigma = V - A.$$

ce qui donnera, d'après la relation ci-dessus,

$$V' - U = 0.$$

Ainsi, par une distribution convenable de la quantité de matière $Q + Q'$, on réduit à zéro, en chaque point de la surface, le potentiel de la couche formée et de la masse $-M$. Mais toute la matière agissante étant ainsi comprise sous la surface S, ce potentiel, d'après un théorème connu, sera aussi nul en tout point de l'espace extérieur, et l'on y aura par suite

$$V = U, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Donc : *Étant donné un système* M *de masses agissantes compris sous une surface fermée* S, *il est toujours possible, d'une seule manière, de distribuer sur la surface* S *une quantité de matière convenablement choisie, de façon que la couche ainsi formée et le système* M *aient le même potentiel, et par conséquent la même action, sur un point quelconque de l'espace extérieur à* S.

C'est le second *principe de Gauss*. De plus, en appliquant la formule (3), on verra facilement, à cause de $V' - U = 0$ en dehors de la surface, que l'on a

$$Q + Q' = M,$$

de sorte que la masse de la couche superficielle sera ici égale à la somme des masses primitives M.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME X

ERRATA.

Page 43, ligne 2 en remontant, *au lieu de* mais les données, *lisez* mais alors les données.

Page 88, lignes 5, 6 et 7, *au lieu de* $\dfrac{\iint}{\Delta_n}$, *lisez* $\dfrac{\iint}{\Delta_0}$.

Page 96, ligne 3, *au lieu de* (113), *lisez* **113**.

Page 117, ligne 16, *au lieu de* (**351**), *lisez* (341).

Page 144, ligne 8, *au lieu de* si l'accolade était nulle, *lisez* si le crochet était nul.

FIN DU TOME X DE LA TROISIÈME SÉRIE.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Ce Tome X clôt la 3e Série du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. La Table des matières contenues dans les dix Volumes de cette Série et la Table générale par noms d'Auteurs seront envoyées ultérieurement à MM. les Abonnés.

M. Resal, qui pendant dix années a dirigé le Journal avec une hauteur de vues et un dévouement dont la Science lui restera reconnaissante, croit, à juste titre, avoir accompli sa tâche; et M. Camille Jordan veut bien prendre, à partir de 1885, la direction du Recueil, avec la collaboration de plusieurs Savants.

L'année 1885 commencera donc la 4e Série du *Journal de Mathématiques*, qui, fondé en 1836 par l'illustre Liouville, se publie sans interruption depuis cette époque et va entrer dans sa cinquantième année.

Si cette publication a pu, sans aucun secours extérieur, faire preuve d'une telle vitalité, à côté de nombreux Recueils soutenus par des Sociétés scientifiques ou par des Gouvernements, c'est grâce au dévouement absolument désintéressé de ses Directeurs et à celui des Géomètres qui lui ont apporté leurs travaux; c'est grâce aussi, nous pouvons le dire, aux encouragements donnés, à certains moments difficiles, par d'illustres Savants, en tête desquels nous nous permettrons de citer, avec reconnaissance, le général Poncelet, J.-B. Dumas et M. J. Bertrand.

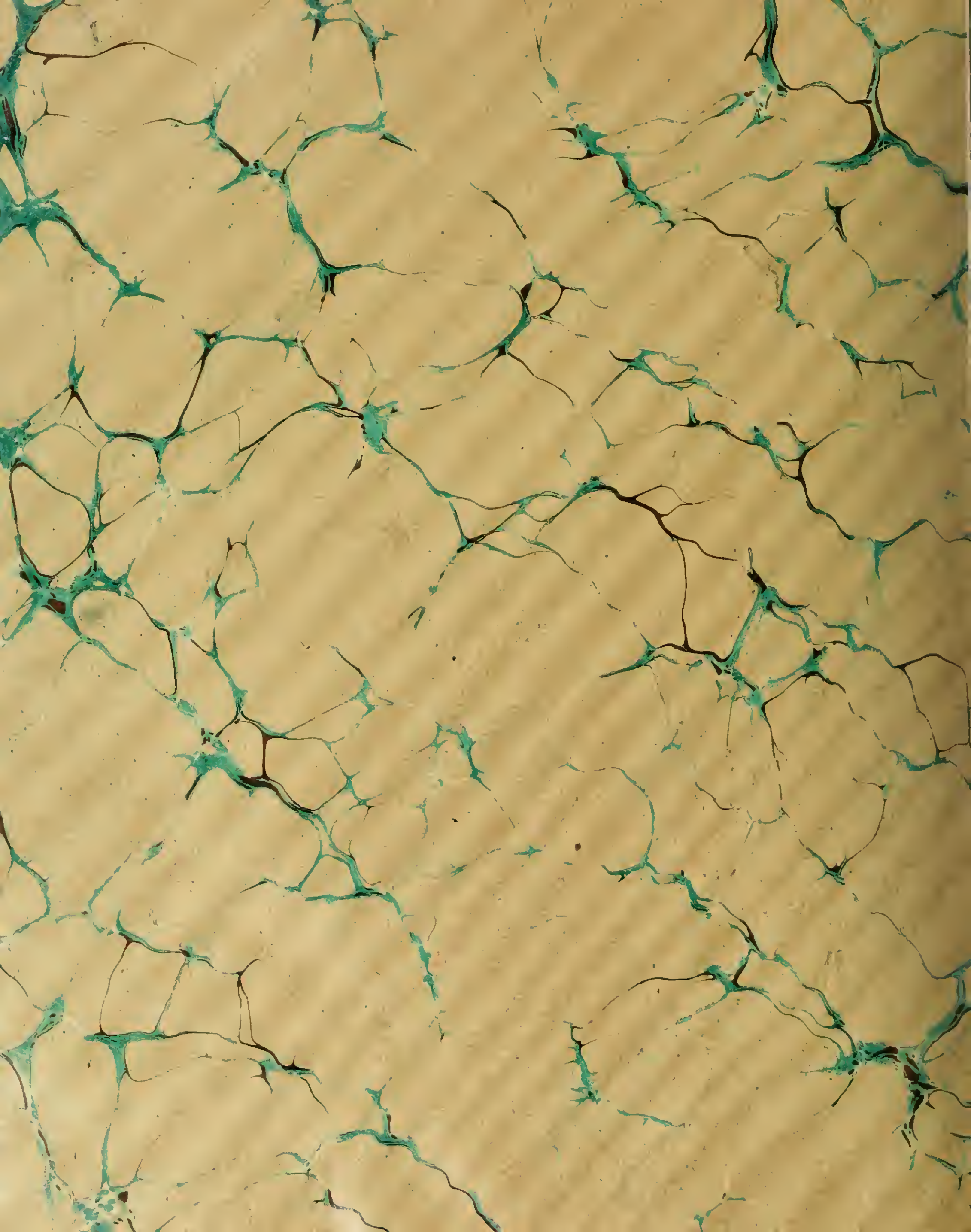
Liouville ne s'était donc pas trompé en ayant foi dans l'avenir, et nous

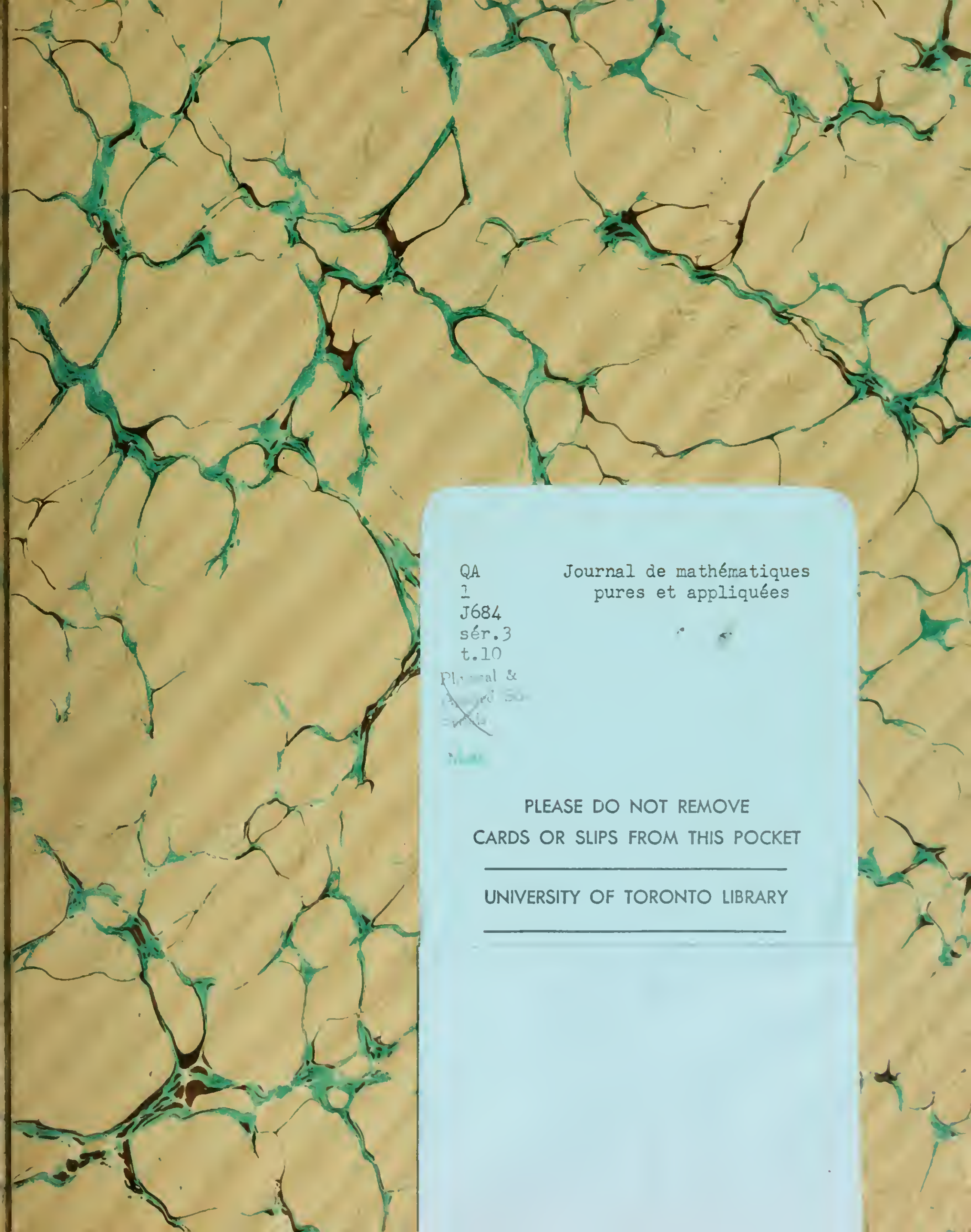
sommes heureux de pouvoir citer, à ce sujet, les lignes qu'il écrivait en tête du premier volume du Journal :

« On voit assez qu'il est ici question d'une entreprise vraiment scientifique, et non d'une spéculation mercantile. C'est maintenant aux Géomètres, surtout aux Géomètres français, qu'il appartient de faire prospérer cette entreprise. Les plus distingués d'entre eux nous ont déjà promis des articles, et, sans aucun doute, ils tiendront leur promesse. Nous osons dire que leur réputation y est intéressée : la chute d'un Journal utile qu'ils auraient refusé de soutenir ne serait honorable ni pour eux ni pour la France. »

G.-V.

9358 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.





QA
1
J684
sér.3
t.10
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

